



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

2002

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé

1. EXERCICE.

Exercice adapté au programme actuel : l'énoncé original était posé sur $\mathbb{C}$ et utilisait les racines complexes conjuguées $\alpha, \bar{\alpha}$ de T . La version traitée ici est entièrement réelle (voir le relevé des adaptations).

Notations utilisées dans tout l'exercice : pour $n \in \mathbb{N}$, on note $r_n = \varphi(X^n)$ le reste de la division euclidienne de X^n par T , et Q_n le quotient, de sorte que $X^n = TQ_n + r_n$ avec $\deg r_n \leq 2$.

On utilisera aussi, sans le redire, que l'application $P \mapsto P(g)$ est linéaire : pour tous $P, R \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda P + R)(g) = \lambda P(g) + R(g)$. Cela découle directement de la définition de $P(g)$ (on regroupe les coefficients de même degré).

1. Question adaptée au programme actuel.

Il s'agit de montrer que 1 est racine de T , de factoriser T par $X - 1$, puis de montrer que le facteur restant n'a pas de racine réelle.

On a $T(1) = 3 - 1 - 1 - 1 = 0$, donc 1 est racine de T et $X - 1$ divise T . On cherche $Q = \lambda X^2 + \mu X + \nu$ tel que $T = (X - 1)Q$. En identifiant les coefficients : $\lambda = 3$ (coefficient de X^3), $-\nu = -1$ (coefficient constant) donc $\nu = 1$, et le coefficient de X^2 donne $\mu - \lambda = -1$, soit $\mu = 2$. Vérification :

$$\begin{aligned} (X - 1)(3X^2 + 2X + 1) &= 3X^3 + 2X^2 + X - 3X^2 - 2X - 1 = 3X^3 - X^2 - X - 1 \\ &= T(X) \end{aligned}$$

Donc $Q(X) = 3X^2 + 2X + 1$.

Le discriminant de Q vaut $\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times 1 = -8 < 0$; on peut aussi écrire

$$Q(x) = 3 \left(x + \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{2}{3} > 0 \text{ pour tout réel } x. \text{ Donc } Q \text{ n'a aucune racine réelle.}$$

Enfin, pour x réel, $T(x) = 0 \iff (x - 1)Q(x) = 0 \iff x = 1$ puisque $Q(x) \neq 0$.

Conclusion

1 est la seule racine réelle de T , et $T = (X - 1)(3X^2 + 2X + 1)$ avec $3X^2 + 2X + 1$ sans racine réelle.

Remarque : $L_3 = \frac{1}{3}Q$, donc $T = 3(X - 1)L_3$; cette relation servira plusieurs fois.

2. a.

Théorème de la division euclidienne : soient A et B deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ avec $B \neq 0$. Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg B$$

Q est le quotient et R le reste de la division euclidienne de A par B .

Ici $\deg T = 3$, donc pour tout P , $\varphi(P)$ est l'unique polynôme R de degré au plus 2 tel que T divise $P - R$.

2. b.

Il faut vérifier que φ est à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$ (c'est clair) et qu'elle est linéaire. On utilise l'unicité dans la division euclidienne.

Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On écrit $P_1 = TS_1 + R_1$ et $P_2 = TS_2 + R_2$ avec $\deg R_1 \leq 2$, $\deg R_2 \leq 2$, de sorte que $R_1 = \varphi(P_1)$ et $R_2 = \varphi(P_2)$. Alors :

$$\lambda P_1 + P_2 = T(\lambda S_1 + S_2) + (\lambda R_1 + R_2)$$

et $\deg(\lambda R_1 + R_2) \leq 2 < 3 = \deg T$. Par unicité du reste,
 $\varphi(\lambda P_1 + P_2) = \lambda R_1 + R_2 = \lambda \varphi(P_1) + \varphi(P_2)$.

Conclusion

φ est une application linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même, c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2. c.

Injectivité : $T = T \times 1 + 0$ avec $\deg 0 < 3$, donc $\varphi(T) = 0$. Comme $T \neq 0$, $\text{Ker } \varphi \neq \{0\}$: φ n'est pas injectif.

Surjectivité : pour tout P , $\deg \varphi(P) \leq 2$, donc $\text{Im } \varphi \subset \mathbb{R}_2[X]$. Le polynôme X^3 n'appartient pas à $\mathbb{R}_2[X]$, donc il n'a pas d'antécédent : φ n'est pas surjectif.

Remarque : si $R \in \mathbb{R}_2[X]$, alors $R = T \times 0 + R$ donc $\varphi(R) = R$; ainsi $\text{Im } \varphi = \mathbb{R}_2[X]$, et $\text{Ker } \varphi$ est l'ensemble des multiples de T .

Conclusion

φ n'est ni injectif, ni surjectif.

3. a. Question adaptée au programme actuel.

Les trois polynômes sont de degré au plus 2, donc appartiennent à $\mathbb{R}_2[X]$, qui est de dimension 3. Il suffit de prouver que la famille est libre.

Méthode 1 — Évaluation en des points bien choisis.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ réels tels que $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 = 0$. En évaluant en 1 :
 $L_1(1) = L_2(1) = 0$ et $L_3(1) = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 2$, d'où $2\lambda_3 = 0$, soit $\lambda_3 = 0$. Il reste
 $(X - 1)(\lambda_1 + \lambda_2 X) = 0$. Comme $X - 1 \neq 0$, on obtient $\lambda_1 + \lambda_2 X = 0$ (le degré d'un produit est la somme des degrés), donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Méthode 2 — Matrice dans la base canonique.

Dans la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$, les coordonnées de L_1, L_2, L_3 sont les colonnes de la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Par pivot de Gauss : $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ donne la ligne $(0, -1, 1)$; puis $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ donne la ligne $(0, 0, 2)$. On obtient une matrice triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $-1, -1, 2$, tous non nuls : M est de rang 3, donc inversible, et la famille (L_1, L_2, L_3) est de rang 3.

La méthode 1 exploite la structure des polynômes (racine commune 1) et sera réutilisée en 3.b pour calculer c_n ; la méthode 2 est l'approche systématique, utilisable sans remarque particulière.

Conclusion

(L_1, L_2, L_3) est une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$, espace de dimension 3 : c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

3. b. Question adaptée au programme actuel.

Existence et unicité. Pour tout n , $r_n = \varphi(X^n)$ est de degré au plus 2, donc appartient à $\mathbb{R}_2[X]$. Comme (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, r_n s'écrit de façon unique $r_n = a_n L_1 + b_n L_2 + c_n L_3$: (a_n, b_n, c_n) est le triplet des coordonnées de r_n dans cette base.

Calcul de c_n . On a $X^n = TQ_n + r_n$. En évaluant en 1 et en utilisant $T(1) = 0$:

$r_n(1) = 1^n = 1$. D'autre part $r_n(1) = a_n L_1(1) + b_n L_2(1) + c_n L_3(1) = 2c_n$. Donc $c_n = \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Calcul de a_0, b_0 . On a $r_0 = 1$ (car $1 = T \times 0 + 1$). Remarquons que $a_n L_1 + b_n L_2 = (X - 1)(a_n + b_n X)$, donc :

$$r_n = \frac{1}{2}L_3 + (X - 1)(b_n X + a_n)$$

Pour $n = 0$:

$$1 - \frac{1}{2}L_3 = 1 - \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{3}X - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}(3X^2 + 2X - 5) = -\frac{1}{6}(X - 1)(3X + 5)$$

(on vérifie que $(X - 1)(3X + 5) = 3X^2 + 2X - 5$). Ainsi $b_0 X + a_0 = -\frac{1}{6}(3X + 5)$, et comme $X - 1 \neq 0$, l'identification donne :

$$a_0 = -\frac{5}{6}, \quad b_0 = -\frac{1}{2}$$

Étape préliminaire : $\varphi(X^{n+1}) = \varphi(Xr_n)$. On a $X^{n+1} = X(TQ_n + r_n) = T(XQ_n) + Xr_n$.

En écrivant $Xr_n = TS + \varphi(Xr_n)$ (division euclidienne de Xr_n par T), on obtient

$X^{n+1} = T(XQ_n + S) + \varphi(Xr_n)$ avec $\deg \varphi(Xr_n) \leq 2$. Par unicité du reste :

$$r_{n+1} = \varphi(Xr_n).$$

Calcul de $\varphi(Xr_n)$. On a $Xr_n = \frac{1}{2}XL_3 + (X - 1)(b_n X^2 + a_n X)$. On réduit les deux termes en utilisant $T = 3(X - 1)L_3$ (question 1) :

- $XL_3 = L_3 + (X - 1)L_3 = L_3 + \frac{1}{3}T.$

- $X^2 = L_3 - \frac{2}{3}X - \frac{1}{3}$, donc

$$(X - 1)b_n X^2 = b_n(X - 1)L_3 - (X - 1)\left(\frac{2b_n}{3}X + \frac{b_n}{3}\right) = \frac{b_n}{3}T - (X - 1)\left(\frac{2b_n}{3}X + \frac{b_n}{3}\right).$$

En regroupant :

$$Xr_n = T\left(\frac{1}{6} + \frac{b_n}{3}\right) + \frac{1}{2}L_3 + (X-1)\left[\left(a_n - \frac{2}{3}b_n\right)X - \frac{1}{3}b_n\right]$$

Le polynôme $R = \frac{1}{2}L_3 + (X-1)\left[\left(a_n - \frac{2}{3}b_n\right)X - \frac{1}{3}b_n\right]$ est de degré au plus 2, donc par unicité du reste, $r_{n+1} = \varphi(Xr_n) = R$. Or :

$$R = -\frac{1}{3}b_n L_1 + \left(a_n - \frac{2}{3}b_n\right)L_2 + \frac{1}{2}L_3$$

Par unicité des coordonnées dans la base (L_1, L_2, L_3) :

$$a_{n+1} = -\frac{1}{3}b_n, \quad b_{n+1} = a_n - \frac{2}{3}b_n \quad (\text{et } c_{n+1} = \frac{1}{2})$$

Contrôle : on obtient $a_1 = \frac{1}{6}, \quad b_1 = -\frac{1}{2}$, et effectivement

$$\frac{1}{2}L_3 + (X-1)\left(-\frac{1}{2}X + \frac{1}{6}\right) = X = r_1.$$

Conclusion

pour tout n , $\varphi(X^n) = a_n L_1 + b_n L_2 + c_n L_3$ avec un unique triplet, $c_n = \frac{1}{2}, \quad a_0 = -\frac{5}{6},$
 $b_0 = -\frac{1}{2}$, et les relations de récurrence demandées.

3. c.

On part de la division euclidienne $X^n = TQ_n + r_n$ et on évalue en f . Par définition, le polynôme X^n évalué en f donne f^n . Par linéarité de $P \mapsto P(f)$ et par la propriété rappelée $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$:

$$f^n = (TQ_n)(f) + r_n(f) = T(f) \circ Q_n(f) + r_n(f) = \Theta \circ Q_n(f) + r_n(f) = r_n(f)$$

Puis, par linéarité, $r_n(f) = a_n L_1(f) + b_n L_2(f) + c_n L_3(f)$.

Conclusion

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n = a_n L_1(f) + b_n L_2(f) + c_n L_3(f)$.

3. d. Question adaptée au programme actuel.

La suite (c_n) est constante égale à $\frac{1}{2}$, donc converge vers $c = \frac{1}{2}$. Pour (a_n) et (b_n) , le système de récurrence ne se ramène pas à une récurrence linéaire d'ordre deux à racines caractéristiques réelles; on montre directement que les suites tendent vers 0.

Méthode 1 — La quantité w_n indiquée par l'énoncé.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Avec les relations de 3.b :

$$b_{n+1} - a_{n+1} = a_n - \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{3}b_n = a_n - \frac{1}{3}b_n$$

donc :

$$w_{n+1} = \left(a_n - \frac{1}{3}b_n\right)^2 + 2 \cdot \frac{b_n^2}{9} = a_n^2 - \frac{2}{3}a_n b_n + \frac{b_n^2}{9} + \frac{2b_n^2}{9} = a_n^2 - \frac{2}{3}a_n b_n + \frac{1}{3}b_n^2$$

D'autre part :

$$\frac{1}{3}w_n = \frac{1}{3}(b_n^2 - 2a_n b_n + a_n^2 + 2a_n^2) = \frac{1}{3}b_n^2 - \frac{2}{3}a_n b_n + a_n^2$$

Donc $w_{n+1} = \frac{1}{3}w_n$. La suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$: $w_n = \frac{w_0}{3^n}$ avec

$$w_0 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{6}\right)^2 + 2 \cdot \frac{25}{36} = \frac{1}{9} + \frac{25}{18} = \frac{3}{2}. \text{ Ainsi } w_n = \frac{3}{2 \cdot 3^n} \rightarrow 0.$$

Comme w_n est somme de deux carrés positifs : $2a_n^2 \leq w_n$ et $(b_n - a_n)^2 \leq w_n$, d'où :

$$|a_n| \leq \sqrt{\frac{w_n}{2}}, \quad |b_n| \leq |b_n - a_n| + |a_n| \leq \sqrt{w_n} + \sqrt{\frac{w_n}{2}}$$

Les majorants tendent vers 0 ; par encadrement, $a_n \rightarrow 0$ et $b_n \rightarrow 0$.

Méthode 2 — Majoration directe à deux pas.

En itérant deux fois les relations de 3.b, pour tout n :

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= -\frac{1}{3}b_{n+1} = -\frac{1}{3}a_n + \frac{2}{9}b_n, & b_{n+2} &= a_{n+1} - \frac{2}{3}b_{n+1} = -\frac{1}{3}b_n - \frac{2}{3}a_n + \frac{4}{9}b_n \\ &= -\frac{2}{3}a_n + \frac{1}{9}b_n \end{aligned}$$

Posons $m_n = \max(|a_n|, |b_n|)$. Par l'inégalité triangulaire, $|a_{n+2}| \leq \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{9}\right) m_n = \frac{5}{9}m_n$ et $|b_{n+2}| \leq \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{9}\right) m_n = \frac{7}{9}m_n$, donc $m_{n+2} \leq \frac{7}{9}m_n$. Par récurrence, pour tout k : $0 \leq m_{2k} \leq \left(\frac{7}{9}\right)^k m_0$ et $0 \leq m_{2k+1} \leq \left(\frac{7}{9}\right)^k m_1$. Les sous-suites paire et impaire de (m_n) tendent vers 0, donc $m_n \rightarrow 0$, et comme $|a_n| \leq m_n$, $|b_n| \leq m_n$, on conclut $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 0$.

La méthode 1 utilise une quantité conservée à un facteur près (une «énergie» qui décroît géométriquement), outil précieux quand le spectre réel ne suffit pas ; la méthode 2 est plus élémentaire mais demande de trouver le bon nombre d'itérations (une seule itération ne donne pas de contraction pour le maximum).

Conclusion

les suites (a_n) , (b_n) , (c_n) convergent respectivement vers $a = 0$, $b = 0$, $c = \frac{1}{2}$.

4. a.

D'après 3.d, $a = b = 0$ et $c = \frac{1}{2}$, donc :

$$h = \frac{1}{2}L_3(f) = \frac{1}{2} \left(f^2 + \frac{2}{3}f + \frac{1}{3}Id_E \right) = \frac{1}{6} (3f^2 + 2f + Id_E)$$

Conclusion

$$h = \frac{1}{6}(3f^2 + 2f + Id_E).$$

4. b.

h est une combinaison linéaire d'endomorphismes de E , donc un endomorphisme de E .
Il reste à montrer $h \circ h = h$.

Méthode 1 — Calcul polynomial modulo T .

On a $L_3^2 - 2L_3 = L_3(L_3 - 2)$ et

$$L_3 - 2 = X^2 + \frac{2}{3}X - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}(3X^2 + 2X - 5) = \frac{1}{3}(X - 1)(3X + 5).$$

Avec $(X - 1)L_3 = \frac{1}{3}T$:

$$L_3^2 - 2L_3 = \frac{1}{3}(X - 1)L_3(3X + 5) = \frac{1}{9}T(3X + 5)$$

En évaluant en f : $L_3(f) \circ L_3(f) - 2L_3(f) = \frac{1}{9}T(f) \circ (3f + 5Id_E) = \Theta$. Donc :

$$h \circ h = \frac{1}{4}L_3(f) \circ L_3(f) = \frac{1}{4} \cdot 2L_3(f) = \frac{1}{2}L_3(f) = h$$

Méthode 2 — La relation $f \circ h = h$.

On a $XL_3 = L_3 + \frac{1}{3}T$ (vu en 3.b), donc en évaluant en f :

$f \circ L_3(f) = L_3(f) + \frac{1}{3}T(f) = L_3(f)$, soit $f \circ h = h$. Par récurrence immédiate, $f^k \circ h = h$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (si $f^k \circ h = h$, alors $f^{k+1} \circ h = f \circ (f^k \circ h) = f \circ h = h$). Donc :

$$h \circ h = \frac{1}{6}(3f^2 \circ h + 2f \circ h + h) = \frac{1}{6}(3 + 2 + 1)h = h$$

La méthode 2 éclaire la situation : l'image de h est formée de vecteurs fixes par f (car $f(h(v)) = h(v)$), et h agit comme l'identité sur ces vecteurs.

Conclusion

$h \circ h = h$, donc h est un projecteur de E .

2. EXERCICE.

2.1. Étude de l'absolue convergence de la série.

1.

On encadre l'intégrande par des fonctions dont l'intégrale se calcule, puis on utilise la croissance de l'intégrale (bornes $0 < 1$ dans l'ordre croissant).

Minoration. Pour $t \in [0, 1]$, $\frac{1+t^2}{2} - t = \frac{(1-t)^2}{2} \geq 0$, donc $\frac{1+t^2}{2} \geq t \geq 0$. La

fonction $s \mapsto s^n$ étant croissante sur $\mathbb{R}_+$: $\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \geq t^n$. D'où :

$$a_n \geq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$$

Majoration. Pour $t \in [0, 1]$, $t^2 \leq t$, donc $0 \leq \frac{1+t^2}{2} \leq \frac{1+t}{2}$ et $\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \leq \left(\frac{1+t}{2}\right)^n$.

Or une primitive de $t \mapsto \left(\frac{1+t}{2}\right)^n$ est $t \mapsto \frac{2}{n+1} \left(\frac{1+t}{2}\right)^{n+1}$, donc :

$$a_n \leq \int_0^1 \left(\frac{1+t}{2}\right)^n dt = \frac{2}{n+1} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \leq \frac{2}{n+1}$$

Conclusion

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{n+1} \leq a_n \leq \frac{2}{n+1}.$$

2.

Pour $|x| = 1$: $|u_n(x)| = a_n |x|^n = a_n \geq \frac{1}{n+1} \geq 0$. La série

$$\sum \frac{1}{n+1}$$

diverge (série harmonique, série de Riemann d'exposant 1, réindexée). Par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum |u_n(x)|$$

diverge.

Conclusion

pour $|x| = 1$, la série n'est pas absolument convergente.

3.

Cas $|x| < 1$: $0 \leq |u_n(x)| \leq \frac{2}{n+1} |x|^n \leq 2|x|^n$, et la série géométrique

$$\sum |x|^n$$

converge car $0 \leq |x| < 1$. Par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum u_n(x)$$

converge absolument.

Cas $|x| = 1$: pas de convergence absolue (question 2).

Cas $|x| > 1$: $|u_n(x)| \geq \frac{|x|^n}{n+1}$ et, par croissances comparées, $\frac{|x|^n}{n+1} \rightarrow +\infty$. Donc $u_n(x)$ ne tend pas vers 0 : la série diverge grossièrement, a fortiori elle n'est pas absolument convergente.

Conclusion

la série de terme général $u_n(x)$ est absolument convergente si et seulement si $|x| < 1$.

2.2. Somme de la série pour $-1 \leq x < 1$.

1.

On étudie le signe de la différence $\delta(x, t) = 2 - x - xt^2 - \frac{3}{2}(1 - x) = \frac{1+x}{2} - xt^2$, pour $t \in [0, 1]$ et $x \in [-1, 1]$.

Méthode 1 — Disjonction selon le signe de x .

Si $0 \leq x < 1$: comme $t^2 \leq 1$, $xt^2 \leq x$, donc $\delta(x, t) \geq \frac{1+x}{2} - x = \frac{1-x}{2} > 0$.

Si $-1 \leq x < 0$: $-xt^2 \geq 0$ et $\frac{1+x}{2} \geq 0$, donc $\delta(x, t) \geq 0$.

Méthode 2 — Fonction affine de x .

À t fixé, $x \mapsto \delta(x, t) = \frac{1}{2} + x \left(\frac{1}{2} - t^2 \right)$ est affine. Elle vaut $t^2 \geq 0$ en $x = -1$ et $1 - t^2 \geq 0$

en $x = 1$. Une fonction affine sur $[-1, 1]$ est comprise entre ses valeurs aux extrémités (elle est monotone), donc elle est positive sur $[-1, 1]$, en particulier sur $[-1, 1[$.

La méthode 2 évite la disjonction de cas : il suffit de contrôler les extrémités, idée utile pour toute expression affine en un paramètre.

Conclusion

$$\text{pour tout } t \in [0, 1], \quad 2 - x - xt^2 \geq \frac{3}{2}(1 - x).$$

2.

D'après la question 1, pour tout $t \in [0, 1]$, $2 - x - xt^2 \geq \frac{3}{2}(1 - x) > 0$ car $x < 1$. La

fonction $t \mapsto \frac{2}{2 - x - xt^2}$ est donc définie et continue sur le segment $[0, 1]$ (quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas).

Conclusion

l'intégrale $\int_0^1 \frac{2 dt}{2 - x - xt^2}$ est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment ; elle existe.

3.

On écrit la somme partielle comme une intégrale de somme géométrique finie, puis on majore le reste.

Pour $t \in [0, 1]$, posons $q(t) = \frac{x(1 + t^2)}{2}$. Alors $1 - q(t) = \frac{2 - x - xt^2}{2} \geq \frac{3}{4}(1 - x) > 0$, donc $q(t) \neq 1$. Par linéarité de l'intégrale (somme finie) :

$$\sum_{k=0}^n u_k(x) = \sum_{k=0}^n x^k \int_0^1 \left(\frac{1 + t^2}{2} \right)^k dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^n q(t)^k dt = \int_0^1 \frac{1 - q(t)^{n+1}}{1 - q(t)} dt$$

Comme $\frac{1}{1 - q(t)} = \frac{2}{2 - x - xt^2}$, on obtient :

$$f(x) - \sum_{k=0}^n u_k(x) = \int_0^1 \frac{q(t)^{n+1}}{1 - q(t)} dt = \int_0^1 x^{n+1} \left(\frac{1+t^2}{2} \right)^{n+1} \frac{2}{2-x-xt^2} dt$$

Par l'inégalité triangulaire pour les intégrales, puis la question 1 ($\frac{2}{2-x-xt^2} \leq \frac{4}{3(1-x)}$) :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n u_k(x) \right| \leq |x|^{n+1} \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2} \right)^{n+1} \frac{2}{2-x-xt^2} dt \leq \frac{4|x|^{n+1}}{3(1-x)} a_{n+1}$$

Enfin $a_{n+1} \leq \frac{2}{n+2}$ d'après 2.1.1.

Conclusion

pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n u_k(x) \right| \leq \frac{8|x|^{n+1}}{3(n+2)(1-x)}.$$

4.

Comme $|x| \leq 1$, $0 \leq \frac{8|x|^{n+1}}{3(n+2)(1-x)} \leq \frac{8}{3(n+2)(1-x)}$, et ce majorant tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$ (x étant fixé avec $1-x > 0$). Par encadrement,

$$\sum_{k=0}^n u_k(x) \rightarrow f(x).$$

Conclusion

pour tout $x \in [-1, 1[$, la série de terme général $u_n(x)$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = f(x) = \int_0^1 \frac{2 dt}{2 - x - xt^2}$$

En $x = -1$, la série converge donc sans converger absolument (question 2.1.2).

5.

$$a_0 = \int_0^1 1 dt = 1.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. On intègre par parties sur le segment $[0, 1]$, avec $U(t) = \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{k+1}$ et

$V(t) = t$, fonctions de classe C^1 sur $[0, 1]$, $U'(t) = (k+1)t \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^k$:

$$a_{k+1} = \left[t \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{k+1} \right]_0^1 - (k+1) \int_0^1 t^2 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^k dt = 1 - (k+1) \int_0^1 t^2 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^k dt$$

Or $t^2 = 2 \cdot \frac{1+t^2}{2} - 1$, donc $\int_0^1 t^2 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^k dt = 2a_{k+1} - a_k$. D'où

$a_{k+1} = 1 - (k+1)(2a_{k+1} - a_k)$, soit $(2k+3)a_{k+1} = 1 + (k+1)a_k$.

Conclusion

$a_0 = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(2k+3)a_{k+1} = 1 + (k+1)a_k$.

6. Code adapté en Python.

Principe : d'après 2.2.3, si $\frac{8|x|^{n+1}}{3(n+2)(1-x)} \leq 10^{-p}$, alors

$$\sum_{k=0}^n u_k(x)$$

est une valeur approchée de $f(x)$ à 10^{-p} près. Ce majorant tend vers 0 (question 4), donc un tel n existe et la boucle ci-dessous s'arrête. On calcule les a_k par la récurrence de 2.2.5, sans calcul d'intégrale.

Python

```
def approx_f(x, p):
    # hypothèse : -1 <= x < 1 et p entier naturel
    a = 1          # a_n, initialisé à a_0 = 1
    puiss = 1      # x**n, initialisé à x**0
    S = a * puiss  # somme partielle u_0(x) + ... + u_n(x), ici n = 0
    n = 0
    while 8 * abs(x)**(n+1) / (3 * (n+2) * (1-x)) > 10**(-p):
        a = (1 + (n+1)*a) / (2*n+3)  # a_{n+1} par la relation de 2.2.5 avec k = n
        puiss = puiss * x             # x**(n+1)
        n = n + 1
        S = S + a * puiss             # ajout de u_n(x) avec le nouvel n
    return S
```

Invariant de boucle : au début de chaque passage, a vaut a_n , $puiss$ vaut x^n et S vaut

$$\sum_{k=0}^n u_k(x).$$

À la sortie, la condition d'arrêt garantit $|f(x) - S| \leq 10^{-p}$ (aux erreurs d'arrondi machine près).

Code exécuté : pour $p = 4$, la comparaison avec une approximation de $f(x)$ par la méthode des trapèzes à 4×10^5 subdivisions donne des écarts d'environ $3,8 \times 10^{-5}$ pour $x = -1$, $3,1 \times 10^{-5}$ pour $x = -0,5$, $1,1 \times 10^{-5}$ pour $x = 0,3$ et $3,1 \times 10^{-5}$ pour $x = 0,9$, tous inférieurs à 10^{-4} . Ce contrôle numérique illustre le résultat mais ne le démontre

pas ; la preuve est l'inégalité de 2.2.3. Pour $x = -1$, le nombre de termes nécessaires est de l'ordre de $\frac{4}{3}10^p$, ce qui reflète la convergence lente de la série en ce point.

3. PROBLÈME.

3.1. Propriétés de la relation de préférence.

Dans toute cette partie, (x, y) , (x', y') , (x'', y'') désignent des éléments de B . Par définition, « (x, y) est préféré ou indifférent à (x', y') » équivaut à $u(x, y) \geq u(x', y')$. Les trois propriétés découlent donc de celles de la relation $\geq$ sur $\mathbb{R}$.

1. a.

$u(x, y) \geq u(x, y)$ (réflexivité de $\geq$ sur $\mathbb{R}$). Donc (x, y) est préféré ou indifférent à (x, y) : la relation est réflexive.

1. b.

Les hypothèses s'écrivent $u(x, y) \geq u(x', y')$ et $u(x', y') \geq u(x'', y'')$. Par transitivité de $\geq$ sur $\mathbb{R}$, $u(x, y) \geq u(x'', y'')$, donc (x, y) est préféré ou indifférent à (x'', y'') : la relation est transitive.

1. c.

Deux réels sont toujours comparables : on a $u(x, y) \geq u(x', y')$ ou $u(x', y') \geq u(x, y)$. Donc (x, y) est préféré ou indifférent à (x', y') ou (x', y') est préféré ou indifférent à (x, y) : la relation est totale.

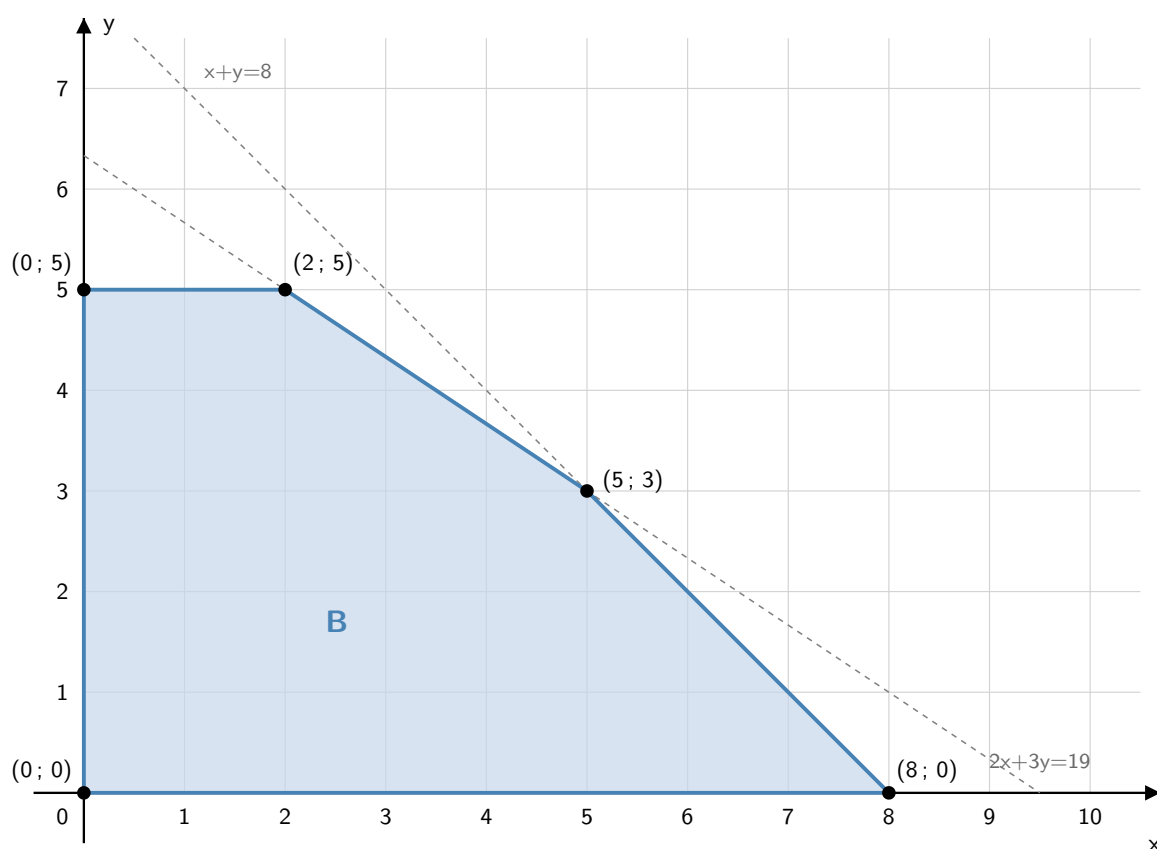
3.2. Courbes d'indifférence.

1.

B est l'intersection des cinq demi-plans fermés $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y \leq 5$, $2x + 3y \leq 19$ et $x + y \leq 8$. On calcule les intersections des droites frontières deux à deux et on garde celles qui vérifient toutes les contraintes.

- $y = 0$ et $x = 0 : (0, 0)$, qui appartient à B .
- $y = 0$ et $x + y = 8 : (8, 0); 2 \times 8 = 16 \leq 19$, donc $(8, 0) \in B$.
- $x + y = 8$ et $2x + 3y = 19$: en soustrayant deux fois la première équation à la seconde, $y = 3$, puis $x = 5$; $(5, 3) \in B$ car $0 \leq 3 \leq 5$.
- $2x + 3y = 19$ et $y = 5 : x = 2$; $(2, 5) \in B$ car $2 + 5 = 7 \leq 8$.
- $y = 5$ et $x = 0 : (0, 5); 15 \leq 19$ et $5 \leq 8$, donc $(0, 5) \in B$.

Les autres intersections sont hors de B : $y = 0$ et $2x + 3y = 19$ donnent $(9,5; 0)$ avec $x + y > 8$; $x + y = 8$ et $y = 5$ donnent $(3, 5)$ avec $2x + 3y = 21 > 19$; $x = 0$ et $2x + 3y = 19$ donnent $y = \frac{19}{3} > 5$; $x = 0$ et $x + y = 8$ donnent $y = 8 > 5$.



Conclusion

B est le pentagone convexe de sommets $(0, 0)$, $(8, 0)$, $(5, 3)$, $(2, 5)$, $(0, 5)$.

2. a.

Soit $(x, y) \in A_m$. Alors $(y - 3)e^{x+2} = m$, et comme $e^{x+2} > 0$:

$$y = 3 + me^{-(x+2)}$$

Conclusion

$f_m(x) = 3 + me^{-(x+2)}$; l'ensemble A_m est la partie de la courbe d'équation $y = f_m(x)$ contenue dans B .

2. b.

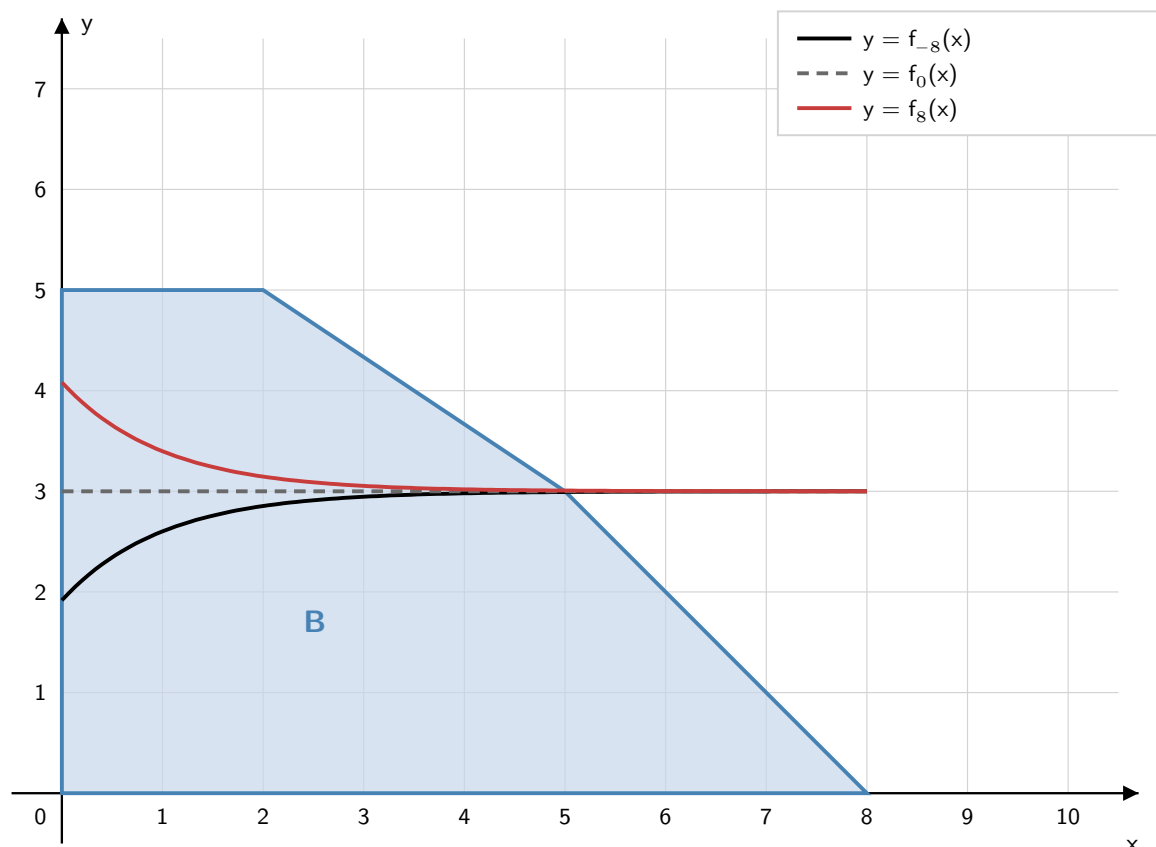
f_m est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$; on l'étudie sur $[0, 8]$, intervalle décrit par les abscisses des points de B . On a $f'_m(x) = -me^{-(x+2)}$, $f''_m(x) = me^{-(x+2)}$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = 3$: la droite $y = 3$ est asymptote à la courbe en $+\infty$.

Cas $m = -8$: $f'_{-8} > 0$ et $f''_{-8} < 0$; f_{-8} est strictement croissante et concave, de $f_{-8}(0) = 3 - 8e^{-2} \approx 1,88$ vers la limite 3, la courbe restant sous l'asymptote. Valeurs approchées (avec les données) : $f_{-8}(1) \approx 2,6$, $f_{-8}(2) \approx 2,84$, $f_{-8}(3) \approx 2,94$, $f_{-8}(4) \approx 2,98$, $f_{-8}(5) \approx 2,99$.

Cas $m = 0$: f_0 est constante égale à 3; A_0 est le segment d'extrémités $(0, 3)$ et $(5, 3)$ (la contrainte $x + y \leq 8$ impose $x \leq 5$).

Cas $m = 8$: $f'_8 < 0$ et $f''_8 > 0$; f_8 est strictement décroissante et convexe, de $f_8(0) = 3 + 8e^{-2} \approx 4,12$ vers 3, la courbe restant au-dessus de l'asymptote. Les courbes de f_8 et f_{-8} sont symétriques par rapport à la droite $y = 3$.

Les ensembles A_{-8} et A_8 sont les arcs de ces courbes situés dans B : ils commencent sur l'axe des ordonnées et s'arrêtent au voisinage de l'abscisse 5, où la courbe sort de B (par le côté $x + y = 8$ pour $m = -8$, par le côté $2x + 3y = 19$ pour $m = 8$).



2. c.

La courbe de f_m est tangente à (T) en un point d'abscisse x_0 si et seulement si $f_m(x_0) = -\frac{2}{3}x_0 + \frac{19}{3}$ et $f'_m(x_0) = -\frac{2}{3}$.

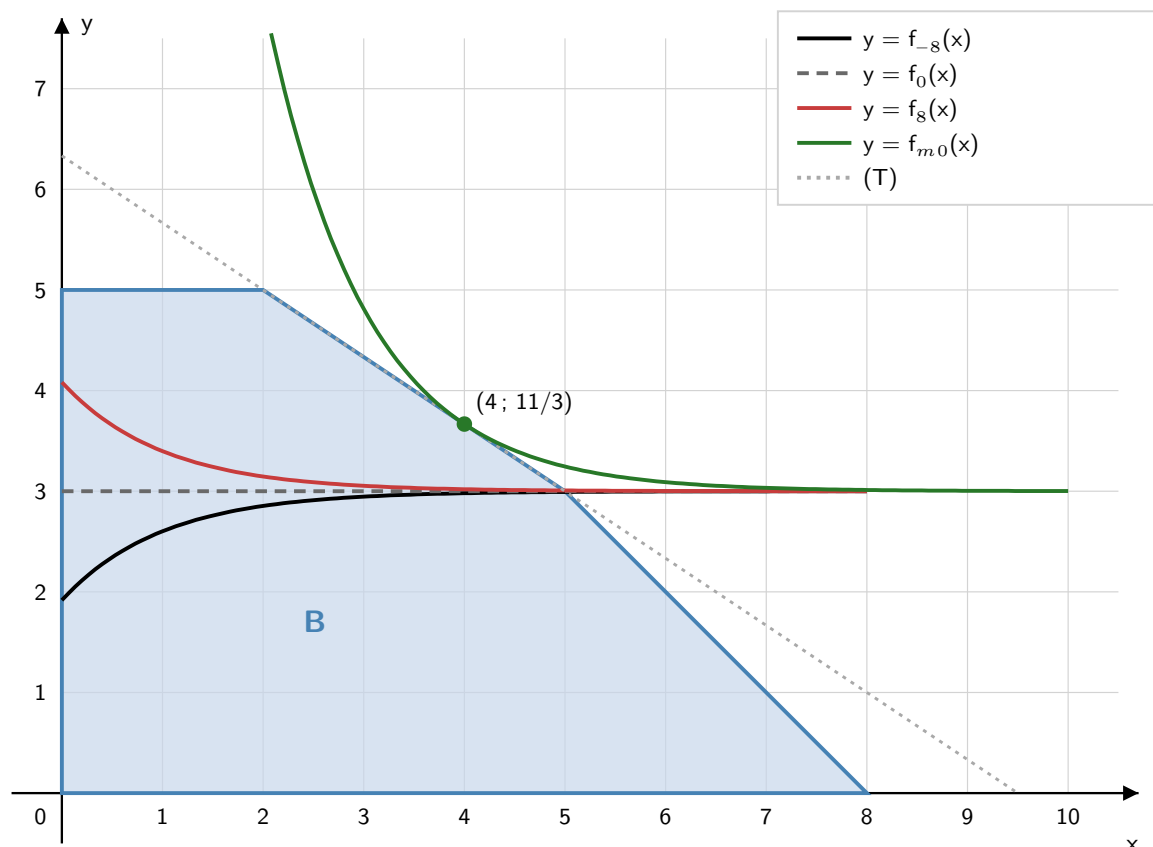
La condition sur la dérivée s'écrit $-m e^{-(x_0+2)} = -\frac{2}{3}$, soit $m e^{-(x_0+2)} = \frac{2}{3}$ (ce qui impose $m > 0$). Alors $f_m(x_0) = 3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$, et la condition sur les ordonnées donne $-\frac{2}{3}x_0 + \frac{19}{3} = \frac{11}{3}$, soit $x_0 = 4$. On en déduit $m = \frac{2}{3}e^6$. Réciproquement, pour cette valeur, les deux conditions sont vérifiées en $x_0 = 4$.

Conclusion

$m_0 = \frac{2}{3}e^6$, et la courbe de $f_{m_0}(x) = 3 + \frac{2}{3}e^{4-x}$ est tangente à (T) au point $\left(4, \frac{11}{3}\right)$, qui appartient au côté de B joignant $(2, 5)$ et $(5, 3)$.

Valeurs utiles pour le tracé : $f_{m_0}(1) \approx 16,4$, $f_{m_0}(2) \approx 7,93$, $f_{m_0}(3) \approx 4,81$,

$f_{m_0}(4) = \frac{11}{3} \approx 3,67$, $f_{m_0}(5) \approx 3,25$, $f_{m_0}(6) \approx 3,09$. La fonction est décroissante et convexe; la courbe est au-dessus de sa tangente (T) (convexité), donc elle ne rencontre B qu'au point de tangence.



3.3. Recherche d'un élément maximal sur B pour la relation de préférence.

1.

Soit $(x, y) \in B$. On a $0 \leq y \leq 5$ et $0 \leq x \leq 8 - y \leq 8$. Donc $B \subset [0, 8] \times [0, 5]$ et, pour la norme euclidienne, $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{64 + 25} = \sqrt{89}$.

Conclusion

B est borné.

2.

B est une partie fermée (admis) et bornée (question 1) de $\mathbb{R}^2$, non vide (elle contient $(0, 0)$). La fonction u est continue sur $\mathbb{R}^2$ (produit d'une fonction polynomiale et de la

composée de exp par une fonction polynomiale), donc sur B . Une fonction continue sur une partie fermée bornée non vide de $\mathbb{R}^2$ y est bornée et atteint ses bornes : il existe $(x_0, y_0) \in B$ tel que $u(x_0, y_0) \geq u(x, y)$ pour tout $(x, y) \in B$.

Conclusion

il existe un couple (x_0, y_0) de B préféré ou indifférent à tous les couples de B .

3.

Méthode 1 — Condition nécessaire du premier ordre.

u est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathring{B}$ (et même sur $\mathbb{R}^2$), avec :

$$\partial_1 u(x, y) = (y - 3)e^{x+2}, \quad \partial_2 u(x, y) = e^{x+2}$$

Si u admettait un extremum local en un point de l'ouvert $\mathring{B}$, ce point serait un point critique : $\nabla u = 0$. Or $\partial_2 u(x, y) = e^{x+2} > 0$ pour tout (x, y) : u n'a aucun point critique.

Méthode 2 — Restriction à une droite verticale.

Soit $(x, y) \in \mathring{B}$. Comme $\mathring{B}$ est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(x, y + h) \in \mathring{B}$ pour $|h| < \varepsilon$. Or $u(x, y + h) - u(x, y) = h e^{x+2}$ est strictement positif pour $h > 0$ et strictement négatif pour $h < 0$. Dans tout voisinage de (x, y) , u prend des valeurs strictement plus grandes et strictement plus petites que $u(x, y)$: ce n'est pas un extremum local.

La méthode 1 applique le théorème du cours ; la méthode 2, qui en est la démonstration dans ce cas particulier, a l'avantage de ne demander aucune régularité.

Conclusion

u n'admet pas d'extremum local sur $\mathring{B}$.

4. a.

Les points de B vérifiant $2x + 3y = 19$ sont les $\left(x, \frac{19-2x}{3}\right)$ tels que $x \geq 0$,
 $0 \leq \frac{19-2x}{3} \leq 5$ et $x + \frac{19-2x}{3} \leq 8$. Ces conditions donnent respectivement $x \geq 0$,
 $2 \leq x \leq \frac{19}{2}$, et $x + 19 \leq 24$, soit $x \leq 5$. L'ensemble des points cherchés est donc
 $\left\{\left(x, \frac{19-2x}{3}\right), x \in [2, 5]\right\}$, et en un tel point :

$$u\left(x, \frac{19-2x}{3}\right) = \left(\frac{19-2x}{3} - 3\right) e^{x+2} = \frac{10-2x}{3} e^{x+2} = g(x)$$

Conclusion

maximiser u sur B sous la contrainte $2x + 3y = 19$ revient à maximiser g sur $[2, 5]$.

4. b.

g est continue sur le segment $[2, 5]$, donc y admet un maximum. g est dérivable et :

$$g'(x) = e^{x+2} \left(-\frac{2}{3} + \frac{10-2x}{3}\right) = \frac{2}{3}(4-x)e^{x+2}$$

$g' > 0$ sur $[2, 4[$ et $g' < 0$ sur $]4, 5]$: g est strictement croissante sur $[2, 4]$ et strictement décroissante sur $[4, 5]$.

Conclusion

le maximum de g sur $[2, 5]$ vaut $g(4) = \frac{2}{3}e^6$, atteint uniquement en $x = 4$; sous la contrainte $2x + 3y = 19$, le maximum de u est $\frac{2}{3}e^6$, atteint uniquement au point $\left(4, \frac{11}{3}\right)$. On retrouve m_0 : la courbe d'indifférence de niveau maximal touche le côté

$$2x + 3y = 19 \text{ au point de tangence de 3.2.2.c.}$$

5.

On procède comme en 4 : description des points de B sur chaque droite, puis étude d'une fonction d'une variable continue sur un segment.

Contrainte $x + y = 8$. Les points sont $(x, 8 - x)$ avec $0 \leq 8 - x \leq 5$, $x \geq 0$ et $2x + 3(8 - x) \leq 19$, soit $x \in [5, 8]$. On étudie $k(x) = u(x, 8 - x) = (5 - x)e^{x+2}$: $k'(x) = (4 - x)e^{x+2} < 0$ sur $[5, 8]$, donc k est strictement décroissante. Maximum : $k(5) = 0$, atteint en $(5, 3)$.

Contrainte $x = 0$. Les points sont $(0, y)$ avec $y \in [0, 5]$ (les contraintes $3y \leq 19$ et $y \leq 8$ sont alors vérifiées). $y \mapsto u(0, y) = (y - 3)e^2$ est strictement croissante. Maximum : $2e^2$, atteint en $(0, 5)$.

Contrainte $y = 0$. Les points sont $(x, 0)$ avec $x \geq 0$, $2x \leq 19$, $x \leq 8$, soit $x \in [0, 8]$. $x \mapsto u(x, 0) = -3e^{x+2}$ est strictement décroissante. Maximum : $-3e^2$, atteint en $(0, 0)$.

Contrainte $y = 5$. Les points sont $(x, 5)$ avec $x \geq 0$, $2x + 15 \leq 19$ et $x + 5 \leq 8$, soit $x \in [0, 2]$. $x \mapsto u(x, 5) = 2e^{x+2}$ est strictement croissante. Maximum : $2e^4$, atteint en $(2, 5)$.

Conclusion

les maxima sous contrainte sont 0 (sur $x + y = 8$), $2e^2$ (sur $x = 0$), $-3e^2$ (sur $y = 0$) et $2e^4$ (sur $y = 5$).

6.

D'après 3.3.2, u atteint son maximum sur B en un point (x_0, y_0) . Ce point n'appartient pas à $\overset{\circ}{B}$: sinon, $\overset{\circ}{B}$ étant ouvert et contenu dans B , u aurait un maximum local en ce point de $\overset{\circ}{B}$, ce qui contredit 3.3.3. Donc $(x_0, y_0) \in B \setminus \overset{\circ}{B}$: l'une des inégalités larges définissant B y est une égalité, c'est-à-dire que (x_0, y_0) vérifie au moins l'une des cinq contraintes $2x + 3y = 19$, $x + y = 8$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 5$.

Par conséquent, $u(x_0, y_0)$ est le plus grand des cinq maxima sous contrainte : $\frac{2}{3}e^6, 0,$

$2e^2, -3e^2, 2e^4$. On a $2e^4 > 2e^2 > 0 > -3e^2$ et

$$\frac{\frac{2}{3}e^6}{2e^4} = \frac{e^2}{3} > 1$$

car $e^2 > 2,7^2 > 3$. Le maximum vaut donc $\frac{2}{3}e^6$; il n'est atteint sur aucune autre contrainte (valeurs strictement plus petites) et, sur la contrainte $2x + 3y = 19$, uniquement en $\left(4, \frac{11}{3}\right)$.

Conclusion

$$(x_0, y_0) = \left(4, \frac{11}{3}\right), \text{ et c'est l'unique élément maximal; } u(x_0, y_0) = \frac{2}{3}e^6 = m_0.$$

3.4. Étude de deux tests d'arrêt.

Notations : pour $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$, et $S_0 = 0$. Par définition,

$T_1 = \min\{n \geq 2 : X_n \geq X_{n-1}\}$ et $T_2 = \min\{n \geq 1 : S_n > N\}$.

Rappel utilisé dans la suite (formule des queues). Si T est une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, \dots, M\}$, alors, en écrivant

$$k = \sum_{n=0}^{k-1} 1$$

et en échangeant deux sommes finies :

$$E(T) = \sum_{k=1}^M kP(T = k) = \sum_{k=1}^M \sum_{n=0}^{k-1} P(T = k) = \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{k=n+1}^M P(T = k) = \sum_{n=0}^{M-1} P(T > n)$$

Ce calcul ne porte que sur des sommes finies; il est donc entièrement justifié.

3.4.1. Partie 1

Étude d'un cas particulier. 1. a.

Ici $N = 3$ et les X_i sont indépendantes, de loi uniforme sur $\{1, 2, 3\}$; pour tout n , les 3^n valeurs possibles de $(X_1, \dots, X_n)$ sont équiprobables.

Loi de T_1 . Le premier consommateur ne peut pas déclencher l'arrêt, donc $T_1 \geq 2$. On a $T_1 > 3$ si et seulement si $X_1 > X_2 > X_3$, c'est-à-dire $(X_1, X_2, X_3) = (3, 2, 1)$; dans ce cas $X_4 \geq 1 = X_3$ et $T_1 = 4$. Une suite strictement décroissante de quatre éléments de $\{1, 2, 3\}$ n'existant pas, $T_1(\Omega) = \{2, 3, 4\}$.

- $P(T_1 = 2) = P(X_2 \geq X_1)$; les couples (i, j) avec $j \geq i$ sont au nombre de $3 + 2 + 1 = 6$, donc $P(T_1 = 2) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

- $P(T_1 = 4) = P((X_1, X_2, X_3) = (3, 2, 1)) = \frac{1}{27}$.

- $P(T_1 = 3) = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{27} = \frac{8}{27}$.

Loi de T_2 . Comme $X_1 \leq 3$, $T_2 \geq 2$. On a $T_2 > 3$ si et seulement si $S_3 \leq 3$, c'est-à-dire $X_1 = X_2 = X_3 = 1$ (chaque $X_i \geq 1$); alors $S_4 \geq 4 > 3$ et $T_2 = 4$. Donc $T_2(\Omega) = \{2, 3, 4\}$.

- $P(T_2 = 2) = P(X_1 + X_2 \geq 4)$; les couples de somme au moins 4 sont $(1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)$, donc $P(T_2 = 2) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

- $P(T_2 = 4) = P(X_1 = X_2 = X_3 = 1) = \frac{1}{27}$.

- $P(T_2 = 3) = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{27} = \frac{8}{27}$.

Conclusion

T_1 et T_2 ont la même loi, donnée par le tableau suivant.

k	2	3	4
$P(T_1 = k) =$	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{1}{27}$
$P(T_2 = k)$			

Étude d'un cas particulier. 1. b.

Les variables sont finies, donc admettent une espérance et une variance.

$$E(T_1) = E(T_2) = 2 \cdot \frac{18}{27} + 3 \cdot \frac{8}{27} + 4 \cdot \frac{1}{27} = \frac{36 + 24 + 4}{27} = \frac{64}{27}$$

$$E(T_1^2) = 4 \cdot \frac{18}{27} + 9 \cdot \frac{8}{27} + 16 \cdot \frac{1}{27} = \frac{72 + 72 + 16}{27} = \frac{160}{27}$$

Par la formule de Koenig-Huygens :

$$V(T_1) = V(T_2) = \frac{160}{27} - \left(\frac{64}{27}\right)^2 = \frac{4320 - 4096}{729} = \frac{224}{729}$$

Conclusion

$$E(T_1) = E(T_2) = \frac{64}{27} \text{ et } V(T_1) = V(T_2) = \frac{224}{729}.$$

Étude de la loi de T_1 . 1.

Le test I ne peut pas s'appliquer au premier consommateur, donc $T_1 \geq 2$. Si $T_1 > N + 1$, alors $X_1 > X_2 > \dots > X_{N+1}$: ce seraient $N + 1$ entiers distincts de $\{1, \dots, N\}$, ce qui est impossible. Donc $T_1 \leq N + 1$.

Réciproquement, soit $n \in \{2, \dots, N+1\}$. L'événement $\{X_1 = n-1, X_2 = n-2, \dots, X_{n-1} = 1, X_n = 1\}$ (possible car $n-1 \leq N$) est de probabilité $\frac{1}{N^n} > 0$ et réalise $T_1 = n$: les $n-1$ premiers numéros décroissent strictement, et $X_n = X_{n-1}$.

Conclusion

$$T_1(\Omega) = \{2, 3, \dots, N+1\}.$$

Étude de la loi de T_1 . 2.

Pour $n = 0$ et $n = 1$: $\{T_1 > n\} = \Omega$ puisque $T_1 \geq 2$, et

$$\frac{\binom{N}{0}}{N^0} = 1,$$

$$\frac{\binom{N}{1}}{N} = 1 :$$

la formule est vraie.

Soit $n \geq 2$. Le sondage n'est pas arrêté après la n -ième personne si et seulement si chaque numéro, du deuxième au n -ième, est strictement inférieur au précédent :

$$\{T_1 > n\} = \{X_1 > X_2 > \dots > X_n\}$$

Par indépendance et uniformité, chaque n -uplet $(k_1, \dots, k_n) \in \{1, \dots, N\}^n$ a la probabilité $P(X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n) = \frac{1}{N^n}$. Un n -uplet strictement décroissant est entièrement déterminé par l'ensemble $\{k_1, \dots, k_n\}$ de ses n éléments (rangés dans l'ordre décroissant) ; il y en a donc autant que de parties à n éléments de $\{1, \dots, N\}$, soit $\binom{N}{n}$ (nombre nul si $n > N$, conformément à la convention). Ainsi :

$$P(T_1 > n) = \frac{\binom{N}{n}}{N^n}$$

Loi de T_1 . Pour $n \geq 1$, $\{T_1 > n - 1\}$ est la réunion disjointe de $\{T_1 = n\}$ et $\{T_1 > n\}$, donc pour $n \in \{2, \dots, N + 1\}$:

$$P(T_1 = n) = \frac{\binom{N}{n-1}}{N^{n-1}} - \frac{\binom{N}{n}}{N^n} = \frac{N \binom{N}{n-1} - \binom{N}{n}}{N^n}$$

Avec $\binom{N}{n} = \frac{N - n + 1}{n} \binom{N}{n-1}$ et $\binom{N+1}{n} = \frac{N+1}{n} \binom{N}{n-1}$, on obtient

$$N \binom{N}{n-1} - \binom{N}{n} = \frac{(n-1)(N+1)}{n} \binom{N}{n-1} = (n-1) \binom{N+1}{n}.$$

Conclusion

$T_1(\Omega) = \{2, \dots, N + 1\}$ et pour tout $n \in \{2, \dots, N + 1\}$,

$$P(T_1 = n) = \frac{(n-1) \binom{N+1}{n}}{N^n}.$$

Pour $N = 3$, on retrouve $\frac{2}{3}, \frac{8}{27}, \frac{1}{27}$.

Étude de la loi de T_1 . 3.

T_1 est une variable finie, elle admet donc une espérance.

Méthode 1 — Formule des queues.

T_1 est à valeurs dans $\{0, \dots, N + 1\}$, donc :

$$E(T_1) = \sum_{n=0}^N P(T_1 > n) = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} \left(\frac{1}{N}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N$$

par la formule du binôme.

Méthode 2 — À partir de la loi.

Pour $n \geq 2$, $n(n-1)\binom{N+1}{n} = (N+1)N\binom{N-1}{n-2}$ (en écrivant les coefficients binomiaux avec les factorielles). Donc, en posant $m = n - 2$:

$$\begin{aligned} E(T_1) &= \sum_{n=2}^{N+1} \frac{n(n-1)\binom{N+1}{n}}{N^n} = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{(N+1)N\binom{N-1}{m}}{N^{m+2}} \\ &= \frac{N+1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \binom{N-1}{m} \left(\frac{1}{N}\right)^m = \frac{N+1}{N} \left(1 + \frac{1}{N}\right)^{N-1} \end{aligned}$$

ce qui vaut bien $\left(1 + \frac{1}{N}\right)^N$.

La méthode 1 n'utilise que les probabilités $P(T_1 > n)$, souvent plus simples que la loi elle-même ; la méthode 2 est le calcul direct par définition, qui demande une manipulation de coefficients binomiaux.

Conclusion

$$E(T_1) = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N.$$

Étude de la loi de T_1 . 4.

$T_1^2 - T_1 = T_1(T_1 - 1)$ est une variable finie, donc admet une espérance. Par le théorème

de transfert, puis en écrivant

$$k(k-1) = \sum_{n=0}^{k-1} 2n$$

et en échangeant deux sommes finies comme dans le rappel :

$$\begin{aligned} E(T_1(T_1 - 1)) &= \sum_{k=1}^{N+1} k(k-1)P(T_1 = k) = \sum_{k=1}^{N+1} \sum_{n=0}^{k-1} 2n P(T_1 = k) = \sum_{n=0}^N 2n P(T_1 > n) \\ &= 2 \sum_{n=0}^N n \binom{N}{n} \frac{1}{N^n} \end{aligned}$$

Il reste à calculer

$$\Sigma = \sum_{n=0}^N n \binom{N}{n} \frac{1}{N^n}.$$

Méthode 1 — Formule du pion.

Pour $n \geq 1$, $n \binom{N}{n} = N \binom{N-1}{n-1}$. Donc, avec $m = n - 1$:

$$\Sigma = \sum_{n=1}^N \frac{N \binom{N-1}{n-1}}{N^n} = \sum_{m=0}^{N-1} \binom{N-1}{m} \frac{1}{N^m} = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^{N-1}$$

Méthode 2 — Dérivation d'une fonction polynomiale.

Pour tout réel s ,

$$(1+s)^N = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} s^n.$$

En dérivant cette égalité entre fonctions polynomiales :

$$N(1+s)^{N-1} = \sum_{n=1}^N n \binom{N}{n} s^{n-1}.$$

En multipliant par s puis en prenant $s = \frac{1}{N}$:

$$\Sigma = \frac{1}{N} \cdot N \left(1 + \frac{1}{N}\right)^{N-1} = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^{N-1}.$$

La méthode 1 est purement combinatoire ; la méthode 2 est une technique générale (dériver la formule du binôme) qui se généralise aux moments d'ordre supérieur.

Donc $E(T_1^2 - T_1) = 2 \left(1 + \frac{1}{N}\right)^{N-1}.$

Variance. Par linéarité, $E(T_1^2) = E(T_1^2 - T_1) + E(T_1)$, et par Koenig-Huygens :

$$V(T_1) = E(T_1^2 - T_1) + E(T_1) - E(T_1)^2 = 2 \left(1 + \frac{1}{N}\right)^{N-1} + \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N - \left(1 + \frac{1}{N}\right)^{2N}$$

Contrôle : pour $N = 3$, on retrouve $\frac{32}{9} + \frac{64}{27} - \frac{4096}{729} = \frac{224}{729}.$

Conclusion

$$E(T_1^2 - T_1) = 2 \left(1 + \frac{1}{N}\right)^{N-1} \text{ et}$$

$$V(T_1) = 2 \left(1 + \frac{1}{N}\right)^{N-1} + \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N - \left(1 + \frac{1}{N}\right)^{2N}.$$

Étude de la loi de T_1 . 5.

On a $\left(1 + \frac{1}{N}\right)^N = \exp\left(N \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right)\right)$. Comme $\ln(1+v) \sim v$ quand $v \rightarrow 0$,
 $N \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right) \sim N \cdot \frac{1}{N} = 1$, donc $N \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right) \rightarrow 1$ et, par continuité de $\exp$,
 $\left(1 + \frac{1}{N}\right)^N \rightarrow e$. Ensuite

$$\left(1 + \frac{1}{N}\right)^{N-1} = \frac{\left(1 + \frac{1}{N}\right)^N}{1 + \frac{1}{N}} \rightarrow e$$

et $\left(1 + \frac{1}{N}\right)^{2N} = \left(\left(1 + \frac{1}{N}\right)^N\right)^2 \rightarrow e^2$.

Conclusion

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} E(T_1) = e \text{ et}$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} V(T_1) = 2e + e - e^2 = 3e - e^2 = e(3 - e) \approx 0,77.$$

Étude de la loi de T_2 . 1.

Méthode 1 — Récurrence sur r et formule de Pascal.

Fixons $n \in \mathbb{N}$. On rappelle la formule de Pascal $\binom{m}{j} + \binom{m}{j+1} = \binom{m+1}{j+1}$, valable pour tous entiers naturels m, j avec la convention de l'énoncé.

Initialisation ($r = 0$) :

$$\sum_{k=0}^0 \binom{k}{n} = \binom{0}{n},$$

qui vaut 1 si $n = 0$ et 0 sinon ; de même $\binom{1}{n+1}$ vaut 1 si $n = 0$ et 0 si $n \geq 1$. L'égalité est vraie.

Hérédité : si

$$\sum_{k=0}^r \binom{k}{n} = \binom{r+1}{n+1},$$

alors

$$\sum_{k=0}^{r+1} \binom{k}{n} = \binom{r+1}{n+1} + \binom{r+1}{n} = \binom{r+2}{n+1}$$

par la formule de Pascal.

Méthode 2 — Dénombrement.

On compte les parties à $n + 1$ éléments de $\{1, \dots, r + 1\}$: il y en a $\binom{r+1}{n+1}$. On les classe selon leur plus grand élément, noté $k + 1$ avec $k \in \{0, \dots, r\}$: une telle partie est obtenue en choisissant ses n autres éléments dans $\{1, \dots, k\}$, d'où $\binom{k}{n}$ parties (nombre nul si $k < n$). En sommant sur k :

$$\binom{r+1}{n+1} = \sum_{k=0}^r \binom{k}{n}.$$

La méthode 1 est mécanique ; la méthode 2 explique la formule (formule « de la crosse de hockey » du triangle de Pascal) et se retrouve facilement.

Conclusion

pour tous entiers naturels r, n ,

$$\sum_{k=0}^r \binom{k}{n} = \binom{r+1}{n+1}.$$

Étude de la loi de T_2 . 2.

Comme $X_1 \leq N$, $S_1 \leq N$ et le sondage ne s'arrête pas après la première personne : $T_2 \geq 2$. Comme chaque $X_i \geq 1$, $S_{N+1} \geq N+1 > N$, donc $T_2 \leq N+1$.

Réciproquement, soit $n \in \{2, \dots, N+1\}$. Sur l'événement $\{X_1 = \dots = X_{n-1} = 1, X_n = N\}$, de probabilité $\frac{1}{N^n} > 0$, on a $S_k = k \leq N$ pour $k \leq n-1$ et $S_n = n-1 + N > N$, donc $T_2 = n$.

Conclusion

$$T_2(\Omega) = \{2, 3, \dots, N+1\}.$$

Étude de la loi de T_2 . 3.

On démontre par récurrence sur $n \in \{1, \dots, N\}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$,

$$P(S_n \leq j) = \frac{\binom{j}{n}}{N^n}.$$

Initialisation ($n = 1$) : pour $j \in \{1, \dots, N\}$,

$$P(X_1 \leq j) = \frac{j}{N} = \frac{\binom{j}{1}}{N}.$$

Hérédité : soit $n \in \{1, \dots, N-1\}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, et soit $j \in \{1, \dots, N\}$. La famille

$(\{X_{n+1} = i\})_{1 \leq i \leq N}$ est un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales, puis l'indépendance de S_n et X_{n+1} (lemme des coalitions : S_n est une fonction de $(X_1, \dots, X_n)$, indépendant de X_{n+1}) :

$$P(S_{n+1} \leq j) = \sum_{i=1}^N P(X_{n+1} = i, S_n \leq j-i) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} P(S_n \leq j-i)$$

Si $i \geq j$, alors $j-i \leq 0 < n \leq S_n$, donc $P(S_n \leq j-i) = 0$. Si $1 \leq i \leq j-1$, alors $j-i \in \{1, \dots, N\}$ et, par hypothèse de récurrence,

$$P(S_n \leq j-i) = \frac{\binom{j-i}{n}}{N^n}.$$

En posant $k = j-i$, qui décrit $\{1, \dots, j-1\}$:

$$P(S_{n+1} \leq j) = \frac{1}{N^{n+1}} \sum_{k=1}^{j-1} \binom{k}{n} = \frac{1}{N^{n+1}} \sum_{k=0}^{j-1} \binom{k}{n} = \frac{\binom{j}{n+1}}{N^{n+1}}$$

en ajoutant le terme $\binom{0}{n} = 0$ (car $n \geq 1$) et en appliquant la question 1 avec $r = j-1$.
Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion

pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$ et tout $j \in \{1, \dots, N\}$,

$$P(X_1 + \dots + X_n \leq j) = \frac{\binom{j}{n}}{N^n}$$

(et la formule est aussi vraie pour $n = 0$ avec $S_0 = 0$).

Étude de la loi de T_2 . 4.

Les X_i étant strictement positives, la suite (S_k) est croissante. Donc, pour $n \geq 1$, le sondage n'est pas arrêté après la n -ième personne si et seulement si $S_1 \leq N, \dots, S_n \leq N$, c'est-à-dire si et seulement si $S_n \leq N$:

$$\{T_2 > n\} = \{S_n \leq N\}$$

D'après la question 3 avec $j = N$: pour $1 \leq n \leq N$,

$$P(T_2 > n) = \frac{\binom{N}{n}}{N^n}.$$

Cette égalité est aussi vraie pour $n = 0$ (les deux membres valent 1) et pour $n \geq N + 1$ (les deux membres sont nuls, d'après la question 2 et la convention). Donc, exactement comme pour T_1 , pour $n \in \{2, \dots, N + 1\}$:

$$P(T_2 = n) = P(T_2 > n - 1) - P(T_2 > n) = \frac{\binom{N}{n-1}}{N^{n-1}} - \frac{\binom{N}{n}}{N^n} = \frac{(n-1)\binom{N+1}{n}}{N^n}$$

Conclusion

T_2 a la même loi que T_1 : $T_2(\Omega) = \{2, \dots, N + 1\}$ et

$$P(T_2 = n) = \frac{(n-1)\binom{N+1}{n}}{N^n}.$$

Étude de la loi de T_2 . 5.

Les deux tests d'arrêt, pourtant de nature très différente (l'un porte sur l'ordre des numéros, l'autre sur leur somme), conduisent à des variables T_1 et T_2 de même loi. En particulier, $E(T_2) = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N$ et $V(T_2) = V(T_1)$: du point de vue du nombre de personnes interrogées, les deux tests sont équivalents. Pour N grand, on interroge en

moyenne environ $e \approx 2,72$ personnes, avec une variance proche de $3e - e^2 \approx 0,77$. Le cas $N = 3$ de la question 1 illustre déjà cette égalité.

Contrôle effectué : un dénombrement exhaustif en Python pour $N \in \{2, 3, 4, 5\}$ confirme l'égalité des lois et les formules de l'espérance et de la variance.

3.4.2. Partie 2

1.

On rappelle le résultat du cours sur la convolution : si U et V sont deux variables indépendantes de densités respectives φ_U et φ_V , et si la fonction

$x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_U(t) \varphi_V(x-t) dt$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors c'est une densité de $U + V$.

Soient $U_1, U_2, \dots$ des variables indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$, de densité $\mathbf{1}_{[0,1]}$, et $Z_n = U_1 + \dots + U_n$. On montre par récurrence sur $n \geq 1$ la propriété : Z_n admet une densité f_n nulle sur $]-\infty, 0[$ et telle que $f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ pour tout $x \in [0, 1]$.

Initialisation : $f_1 = \mathbf{1}_{[0,1]}$ convient ($\frac{x^0}{0!} = 1$ sur $[0, 1]$).

Hérédité : supposons la propriété vraie au rang n . Par le lemme des coalitions, Z_n et U_{n+1} sont indépendantes. Pour tout réel x :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) \mathbf{1}_{[0,1]}(x-t) dt = \int_{x-1}^x f_n(t) dt = F_n(x) - F_n(x-1)$$

où F_n est la fonction de répartition de Z_n (on a utilisé

$\mathbf{1}_{[0,1]}(x-t) = 1 \iff x-1 \leq t \leq x$, et l'intégrale porte sur un segment). La fonction de répartition d'une variable à densité est continue sur $\mathbb{R}$, donc h est continue sur $\mathbb{R}$: par le théorème rappelé, h est une densité de Z_{n+1} . Pour $x < 0$, f_n est nulle sur $[x-1, x]$, donc $h(x) = 0$. Pour $x \in [0, 1]$, f_n est nulle sur $[x-1, 0[$, d'où :

$$h(x) = \int_0^x f_n(t) dt = \int_0^x \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} dt = \frac{x^n}{n!}$$

La propriété est vraie au rang $n + 1$ avec $f_{n+1} = h$.

Conclusion

la somme de n variables indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$ admet une densité f_n , nulle sur $]-\infty, 0[$, vérifiant $f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ pour tout $x \in [0, 1]$. En particulier, pour $z \in [0, 1]$: $P(Z_n \leq z) = \int_0^z f_n(t) dt = \frac{z^n}{n!}$.

2.

Comme $N \geq 2$, $N - 1 > 0$ et $Y = \frac{X - 1}{N - 1}$ est bien définie. On détermine sa fonction de répartition G .

Méthode 1 — Fonction de répartition.

Pour tout réel y , $G(y) = P\left(\frac{X - 1}{N - 1} \leq y\right) = P(X \leq 1 + (N - 1)y)$ car $N - 1 > 0$. La fonction de répartition de X vaut 0 avant 1, $\frac{s - 1}{N - 1}$ pour $s \in [1, N]$ et 1 après N . Or $1 + (N - 1)y \in [1, N] \iff y \in [0, 1]$. Donc $G(y) = 0$ si $y < 0$, $G(y) = \frac{(N - 1)y}{N - 1} = y$ si $y \in [0, 1]$, $G(y) = 1$ si $y > 1$: c'est la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0, 1]$, qui caractérise la loi.

Méthode 2 — Transformation affine d'une variable à densité.

Si X a pour densité φ_X et $a > 0$, b réels, alors $aX + b$ a pour densité $y \mapsto \frac{1}{a}\varphi_X\left(\frac{y - b}{a}\right)$.

Avec $Y = \frac{1}{N - 1}X - \frac{1}{N - 1}$, on obtient la densité

$$y \mapsto (N - 1)\varphi_X(1 + (N - 1)y) = (N - 1) \cdot \frac{1}{N - 1} \mathbf{1}_{[1, N]}(1 + (N - 1)y) = \mathbf{1}_{[0, 1]}(y).$$

La méthode 1 redémontre le résultat ; la méthode 2 applique directement le résultat du cours sur les transformations affines.

Conclusion

Y suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

3.

Pour tout i , posons $Y_i = \frac{X_i - 1}{N - 1}$. D'après la question 2, les Y_i suivent la loi uniforme sur $[0, 1]$, et elles sont mutuellement indépendantes comme fonctions respectives des variables indépendantes X_i . Quitte à négliger un événement de probabilité nulle, chaque X_i prend ses valeurs dans $[1, N]$, donc est strictement positive : comme en Partie 1, la suite (S_n) est croissante et, pour $n \geq 1$, $\{T_2 > n\} = \{S_n \leq N\}$.

Or $S_n = n + (N - 1)(Y_1 + \dots + Y_n)$, donc :

$$\{T_2 > n\} = \left\{ Y_1 + \dots + Y_n \leq \frac{N - n}{N - 1} \right\}$$

Pour $1 \leq n \leq N$, $z_n = \frac{N - n}{N - 1} \in [0, 1]$, et la question 1 donne :

$$P(T_2 > n) = \frac{z_n^n}{n!} = \frac{(N - n)^n}{n! (N - 1)^n}$$

En particulier $P(T_2 > 1) = 1$ (donc $T_2 \geq 2$ presque sûrement) et $P(T_2 > N) = 0$ (donc $T_2 \leq N$ presque sûrement). Ainsi T_2 prend presque sûrement ses valeurs dans $\{2, \dots, N\}$ et, pour $n \in \{2, \dots, N\}$:

$$P(T_2 = n) = P(T_2 > n - 1) - P(T_2 > n) = \frac{(N - n + 1)^{n-1}}{(n - 1)! (N - 1)^{n-1}} - \frac{(N - n)^n}{n! (N - 1)^n}$$

Contrôles : la somme de ces probabilités est télescopique et vaut

$P(T_2 > 1) - P(T_2 > N) = 1$. Pour $N = 2$, $T_2 = 2$ presque sûrement ; pour $N = 3$,

$P(T_2 = 2) = \frac{7}{8}$ et $P(T_2 = 3) = \frac{1}{8}$. Une simulation Python (4×10^5 répétitions avec `numpy.random.uniform`) pour $N = 3$ et $N = 5$ donne des fréquences en accord avec ces valeurs à 10^{-3} près; elle illustre le résultat sans le démontrer.

Conclusion

dans le modèle continu, $T_2(\Omega) = \{2, \dots, N\}$ presque sûrement et, pour $n \in \{2, \dots, N\}$, $P(T_2 = n) = \frac{(N - n + 1)^{n-1}}{(n-1)!(N-1)^{n-1}} - \frac{(N - n)^n}{n!(N-1)^n}$. Contrairement au cas discret, la valeur $N + 1$ n'est plus atteinte.

Relevé des adaptations

- Exercice 1, préambule : l'espace vectoriel E et les polynômes sont réels ($\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{R}_n[X]$) au lieu de complexes. Justification : nombres complexes exclus du programme.
- Exercice 1, question 1 : la demande «soient α et $\bar{\alpha}$ les deux autres racines non réelles et conjuguées, calculer $\alpha + \bar{\alpha}$ et $\alpha\bar{\alpha}$ » est remplacée par la factorisation $T = (X - 1)Q$ et la vérification que Q n'a pas de racine réelle. Justification : racines complexes hors programme ; l'objectif (1 seule racine réelle, structure de T) est conservé.
- Exercice 1, question 3 : $L_1 = (X - 1)(X - \alpha)$ et $L_2 = (X - 1)(X - \bar{\alpha})$ sont remplacés par $L_1 = X - 1$ et $L_2 = X(X - 1)$; $L_3 = (X - \alpha)(X - \bar{\alpha})$ est conservé sous sa forme réelle $X^2 + \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}$. En 3.b, l'expression de a_n, b_n en fonction de $\alpha, \bar{\alpha}, n$ est remplacée par le calcul de a_0, b_0 et une relation de récurrence (avec une indication). En 3.d, une quantité auxiliaire w_n est introduite pour prouver la convergence, et les limites sont à déterminer. Justification : la forme explicite de a_n, b_n nécessite des puissances de nombres complexes; la valeur $c_n = \frac{1}{2}$, la question 3.c et la question 4 restent inchangées.
- Exercice 2, question 2.2.6 : Code adapté en Python. L'algorithme demandé en PASCAL est demandé sous forme d'une fonction Python `approx_f(x, p)`.

- Problème, partie 3.4.1 : la notation C_n^j est remplacée par $\binom{n}{j}$, avec la même convention ($\binom{n}{j} = 0$ pour $j > n$).
- Problème, partie 3.4.2 : «variables aléatoires absolument continues» est remplacé par «variables aléatoires à densité», terminologie du programme actuel.
- Problème, questions 3.2.1, 3.2.2.b et 3.2.2.c : les représentations graphiques demandées sont fournies en SVG dans le corrigé, calculées exactement à partir des définitions ; l'énoncé original ne comporte pas de figure.