



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

2000

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

Rappels utilisés dans tout l'exercice. Pour toute matrice carrée M et tout entier $k \geq 1$, on a ${}^t(M^k) = ({}^tM)^k$: c'est vrai pour $k = 1$ et, si c'est vrai au rang k , alors

$${}^t(M^{k+1}) = {}^t(M^k M) = {}^tM {}^t(M^k) = {}^tM ({}^tM)^k = ({}^tM)^{k+1}.$$

Pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^m$, ${}^tX X = \|X\|^2$, qui est nul si et seulement si $X = 0$. Une matrice A de type -1 est nécessairement inversible, puisque A^{-1} intervient dans la définition.

Question 1 a)

On traduit la définition pour $n = 0$ puis $n = 1$, en rappelant que $A^0 = I_m$ et $A^1 = A$.

Type 0 : A est de type 0 si et seulement si ${}^tA = I_m$. En transposant, cette égalité équivaut à $A = {}^t({}^tA) = {}^tI_m = I_m$. La seule matrice de type 0 est donc I_m .

Type 1 : A est de type 1 si et seulement si ${}^tA = A$.

Conclusion

la seule matrice de type 0 est la matrice identité I_m ; les matrices de type 1 sont exactement les matrices symétriques d'ordre m .

Question 1 b)

Une matrice A est de type -1 si et seulement si elle est inversible et ${}^tA = A^{-1}$. Il suffit de trouver une matrice non diagonale P vérifiant ${}^tP P = I_m$: pour une matrice carrée, cette égalité entraîne que P est inversible d'inverse ${}^tP$.

On choisit la matrice qui échange les deux premiers vecteurs de la base canonique et fixe les autres :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Pour $m = 3$, il s'agit de

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérification. P est symétrique, donc ${}^tP = P$. Ses colonnes sont $Pe_1 = e_2$, $Pe_2 = e_1$ et $Pe_i = e_i$ pour $i \geq 3$, où $(e_1, \dots, e_m)$ est la base canonique. Donc $P^2e_1 = Pe_2 = e_1$, $P^2e_2 = Pe_1 = e_2$ et $P^2e_i = e_i$ pour $i \geq 3$: $P^2 = I_m$. Ainsi P est inversible, $P^{-1} = P = {}^tP$, et P n'est pas diagonale puisque son coefficient en position $(1, 2)$ vaut 1.

Conclusion

P est une matrice non diagonale de type -1 .

Question 2 a)

On établit d'abord, pour tous réels a et b , l'égalité $N(a)N(b) = N(a+b)$, puis on raisonne par récurrence sur k .

Calcul de $N(a)N(b)$. La première ligne de $N(a)$ est nulle, donc la première ligne du produit est nulle. La première colonne de $N(b)$ est nulle, donc la première colonne du

produit est nulle. Pour $i, j \in \{2, 3\}$, le coefficient (i, j) du produit vaut

$$\sum_{l=1}^3 N(a)_{il} N(b)_{lj},$$

où le terme $l = 1$ est nul puisque $N(a)_{i1} = 0$. Il reste le produit des blocs inférieurs droits :

$$\begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \cos a \cos b - \sin a \sin b & -\cos a \sin b - \sin a \cos b \\ \sin a \cos b + \cos a \sin b & -\sin a \sin b + \cos a \cos b \end{pmatrix}$$

Les formules d'addition $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ montrent que ce bloc est celui de $N(a+b)$. Donc $N(a)N(b) = N(a+b)$.

Récurrence. Pour $k \geq 1$, notons $\mathcal{P}(k) : \langle (N(x))^k = N(kx) \rangle$. $\mathcal{P}(1)$ est vraie. Si $\mathcal{P}(k)$ est vraie, alors $(N(x))^{k+1} = (N(x))^k N(x) = N(kx)N(x) = N((k+1)x)$ d'après le calcul précédent, donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion

pour tout entier $k \geq 1$, $(N(x))^k = N(kx)$.

Question 2 b)

On cherche les réels x tels que ${}^t N(x) = (N(x))^n$, avec $n \geq 2$.

Par parité de cos et imparité de sin,

$${}^tN(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \end{pmatrix} = N(-x).$$

D'après 2) a), $(N(x))^n = N(nx)$. Deux matrices de la forme $N(\cdot)$ sont égales si et seulement si leurs coefficients en positions $(2, 2)$ et $(3, 2)$ coïncident. Donc :

$$N(x) \text{ est de type } n \iff \cos(nx) = \cos x \text{ et } \sin(nx) = -\sin x.$$

Sens direct. Si $\cos(nx) = \cos x$ et $\sin(nx) = -\sin x$, la formule d'addition donne

$$\cos((n+1)x) = \cos(nx)\cos x - \sin(nx)\sin x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Or $\cos \theta = 1$ si et seulement si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $(n+1)x = 2k\pi$.

Réciproque. Si $(n+1)x = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors $nx = 2k\pi - x$, donc par 2π -périodicité, parité de cos et imparité de sin : $\cos(nx) = \cos(-x) = \cos x$ et $\sin(nx) = \sin(-x) = -\sin x$.

Conclusion

$$N(x) \text{ est de type } n \text{ si et seulement si } x = \frac{2k\pi}{n+1} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Question 3 a)

On transpose l'égalité ${}^tA = A^n$ et on utilise le rappel ${}^t(M^n) = ({}^tM)^n$.

$$A = {}^t({}^tA) = {}^t(A^n) = ({}^tA)^n = (A^n)^n = A^{n^2}.$$

Conclusion

$$A^{(n^2)} = A.$$

Question 3 b)

Il faut établir deux propriétés de $B = A^{n+1}$. L'idée commune est d'écrire $B = A^n A = {}^t A A$.

Égalité $B^n = B$. On a $B^n = A^{n(n+1)} = A^{n^2} A^n$. D'après 3) a), $A^{n^2} = A$, donc $B^n = A A^n = A^{n+1} = B$.

Symétrie de B .

Méthode 1 — Écriture $B = {}^t A A$. Comme A est de type n , $B = A^n A = {}^t A A$. Alors ${}^t B = {}^t A {}^t({}^t A) = {}^t A A = B$.

Méthode 2 — Calcul des puissances.

$${}^t B = {}^t(A^{n+1}) = ({}^t A)^{n+1} = (A^n)^{n+1} = A^{n(n+1)} = B^n = B,$$

d'après le point précédent.

La méthode 1 met en évidence l'écriture $B = {}^t A A$, qui servira dans toute la suite (questions 3) d), 4) a) et 5)); la méthode 2 n'utilise que le calcul sur les exposants et la relation $B^n = B$.

Conclusion

$B^n = B$ et B est symétrique.

Question 3 c)

On exploite la symétrie de B et le polynôme annulateur $X^n - X$.

Comme B est une matrice symétrique réelle, le théorème spectral assure que B est diagonalisable avec une matrice de passage orthogonale ; en particulier B possède des valeurs propres réelles, et son spectre est non vide.

Le polynôme $Q(X) = X^n - X$ annule B d'après 3) b). Toute valeur propre λ de B est donc racine de $Q : \lambda^n = \lambda$. Si $\lambda \neq 0$, alors $\lambda^{n-1} = 1$, donc $|\lambda|^{n-1} = 1$ et $|\lambda| = 1$, soit $\lambda \in \{-1, 1\}$; de plus $\lambda = -1$ n'est possible que si $n - 1$ est pair, c'est-à-dire si n est impair.

Conclusion

B est diagonalisable et ses valeurs propres appartiennent à $\{-1, 0, 1\}$ (et même à $\{0, 1\}$ lorsque n est pair).

Question 3 d)

On calcule le réel ${}^tV B V$ à l'aide de $BV = -V$, puis à l'aide de $B = {}^tA A$. Par définition d'un vecteur propre, $V \neq 0$.

Premier calcul. $BV = -V$ donne ${}^tV B V = -{}^tV V = -\|V\|^2 < 0$.

Second calcul. $B = {}^tA A$ (question 3) b)), donc
 ${}^tV B V = {}^tV {}^tA A V = {}^t(AV) (AV) = \|AV\|^2 \geq 0$.

Les deux résultats sont incompatibles : un réel ne peut être à la fois strictement négatif et positif.

Conclusion

-1 n'est pas valeur propre de B ; d'après 3) c), les valeurs propres de B appartiennent à $\{0, 1\}$.

Question 3 e)

On montre que $B^2 = B$, puis on utilise la caractérisation des projecteurs orthogonaux par la symétrie.

D'après le théorème spectral, il existe une matrice P inversible vérifiant $P^{-1} = {}^tP$ et une matrice diagonale D telles que $B = PD {}^tP$. Les coefficients diagonaux de D sont des valeurs propres de B , donc valent 0 ou 1 d'après 3) d). Comme $0^2 = 0$ et $1^2 = 1$, on a $D^2 = D$. Alors $B^2 = PD {}^tP PD {}^tP = PD^2 {}^tP = PD {}^tP = B$.

Soit β l'endomorphisme de $\mathbb{R}^m$ de matrice B dans la base canonique. L'égalité $B^2 = B$ signifie que $\beta \circ \beta = \beta$: β est un projecteur. La base canonique est orthonormale pour le produit scalaire canonique et B est symétrique, donc β est un endomorphisme symétrique. Un projecteur symétrique est un projecteur orthogonal.

Conclusion

B est la matrice (dans la base canonique) d'un projecteur orthogonal. On retiendra $B^2 = B$ et ${}^tB = B$.

Question 4 a)

Inclusion $E_B \subset E_A$.

Méthode 1 — Par la norme. Soit $X \in E_B$, c'est-à-dire $BX = 0$. Alors

$0 = {}^tX BX = {}^tX {}^tA A X = \|AX\|^2$, donc $AX = 0$ et $X \in E_A$.

Méthode 2 — Par les puissances. Comme $n \geq 2$, l'entier $n^2 - n - 1 = n(n - 1) - 1$ est supérieur ou égal à 1. D'après 3) a), $A = A^{n^2} = A^{n^2-n-1} A^{n+1} = A^{n^2-n-1} B$. Si $BX = 0$, alors $AX = A^{n^2-n-1}(BX) = 0$.

La méthode 1 utilise la structure euclidienne (écriture $B = {}^t A A$), la méthode 2 seulement l'algèbre des puissances de A ; cette seconde idée resservira en 4) b).

Inclusion $E_A \subset E_B$. Si $AX = 0$, alors $BX = A^n(AX) = 0$.

Conclusion

$$E_B \subset E_A, \text{ puis } E_B = E_A.$$

Question 4 b)

Inclusion $F_B \subset F_A$. Pour tout X , $BX = A(A^n X) \in F_A$.

Inclusion $F_A \subset F_B$.

Méthode 1 — Par les puissances. Avec $n^2 - n - 1 \geq 1$, on a

$$A = A^{n^2} = A^{n+1} A^{n^2-n-1} = B A^{n^2-n-1}. \text{ Pour tout } X, AX = B(A^{n^2-n-1} X) \in F_B.$$

Méthode 2 — Par le théorème du rang. Le théorème du rang appliqué aux endomorphismes de matrices A et B donne $\dim F_A = m - \dim E_A$ et $\dim F_B = m - \dim E_B$. Comme $E_A = E_B$ (question 4) a)), $\dim F_A = \dim F_B$. Avec l'inclusion $F_B \subset F_A$, on obtient $F_A = F_B$.

La méthode 1 est purement calculatoire; la méthode 2 illustre le procédé classique « une inclusion et l'égalité des dimensions ».

Donc $F_A = F_B$.

Supplémentarité orthogonale. On établit que E_B et F_B sont supplémentaires orthogonaux, en utilisant $B^2 = B$ et ${}^t B = B$ (question 3) e)).

Si $Y \in F_B$, il existe W tel que $Y = BW$, donc $BY = B^2W = BW = Y$.

Orthogonalité : soient $X \in E_B$ et $Y \in F_B$. Alors

$$(X | Y) = {}^t X B Y = {}^t X {}^t B Y = {}^t (B X) Y = 0.$$

Somme directe : si $Y \in E_B \cap F_B$, alors $Y = BY = 0$.

Somme égale à $\mathbb{R}^m$: tout X s'écrit $X = (X - BX) + BX$, avec $BX \in F_B$ et $B(X - BX) = BX - B^2X = 0$, donc $X - BX \in E_B$.

Ainsi $\mathbb{R}^m = E_B \oplus F_B$ avec $E_B \perp F_B$. Comme $E_A = E_B$ et $F_A = F_B$, il en est de même pour E_A et F_A .

Conclusion

$F_A = F_B$, et E_A et F_A sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbb{R}^m$.

Question 5

On utilise $F_A = F_B$, le fait que B laisse fixes les vecteurs de F_B et l'écriture $B = {}^t A A$.

Soit $U \in F_A$. D'après 4) b), $U \in F_B$, donc $BU = U$. Alors

$$\|AU\|^2 = {}^t(AU)(AU) = {}^t U {}^t A A U = {}^t U B U = {}^t U U = \|U\|^2.$$

Les normes étant positives, on en déduit l'égalité des normes.

Conclusion

pour tout $U \in F_A$, $\|AU\| = \|U\|$.

Question 6

On montre que $B = I_m$, ce qui donne ${}^t A A = I_m$.

Méthode 1 — Par les sous-espaces. Si A est inversible, $E_A = \{0\}$, donc $F_A = \mathbb{R}^m$ par le théorème du rang. D'après 4) b), $F_B = \mathbb{R}^m$, et l'on a vu en 4) b) que $BY = Y$ pour tout $Y \in F_B$. Donc $BY = Y$ pour tout $Y \in \mathbb{R}^m$, c'est-à-dire $B = I_m$.

Méthode 2 — Par l'inversibilité de B . $B = A^{n+1}$ est un produit de matrices inversibles, donc est inversible. En multipliant l'égalité $B^2 = B$ (question 3) e)) par B^{-1} , on obtient $B = I_m$.

La méthode 1 réutilise la description géométrique du projecteur, la méthode 2 un argument algébrique général : un projecteur inversible est l'identité.

Dans les deux cas, ${}^t A A = B = I_m$. La matrice carrée A est inversible et ${}^t A A = I_m$ donne, en multipliant à droite par A^{-1} , ${}^t A = A^{-1}$.

Conclusion

A est de type -1 .

Question 7

On suppose ${}^t A = A^n$ et ${}^t A = A^{n+1}$. Comme A est de type n avec $n > 1$, toutes les questions précédentes s'appliquent.

On a ${}^t A = A^{n+1} = B$. Comme B est symétrique, $A = {}^t({}^t A) = {}^t B = B$.

Conclusion

$A = B$ est une matrice de projecteur orthogonal d'après 3) e).

Exercice 2

Question 1 a)

On compare l'intégrande à une exponentielle intégrable.

La fonction $u \mapsto \frac{1}{e^u + a}$ est continue sur $[0, +\infty[$ car $e^u + a > 0$, et positive. Pour tout $u \geq 0$, $e^u + a \geq e^u > 0$, donc $0 \leq \frac{1}{e^u + a} \leq e^{-u}$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-u} du$ converge (intégrale de référence, égale à 1).

Conclusion

par comparaison de fonctions positives, l'intégrale J converge.

Question 1 b)

On calcule l'intégrale sur un segment $[0, X]$ puis on fait tendre X vers $+\infty$.

Méthode 1 — Calcul de aJ , comme suggéré. Pour tout u , $\frac{a}{e^u + a} = 1 - \frac{e^u}{e^u + a}$, et $u \mapsto \ln(e^u + a)$ est une primitive de $u \mapsto \frac{e^u}{e^u + a}$. Pour $X > 0$:

$$\int_0^X \frac{a}{e^u + a} du = X - \ln(e^X + a) + \ln(1 + a).$$

Or $X - \ln(e^X + a) = -\ln\left(\frac{e^X + a}{e^X}\right) = -\ln(1 + ae^{-X})$, qui tend vers $-\ln 1 = 0$ quand $X \rightarrow +\infty$, par continuité de $\ln$ en 1. Donc $aJ = \ln(1 + a)$.

Méthode 2 — Primitive directe. On écrit $\frac{1}{e^u + a} = \frac{e^{-u}}{1 + ae^{-u}}$. La fonction

$u \mapsto -\frac{1}{a} \ln(1 + ae^{-u})$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ de dérivée $-\frac{1}{a} \cdot \frac{-ae^{-u}}{1 + ae^{-u}} = \frac{e^{-u}}{1 + ae^{-u}}$.
Donc, pour $X > 0$:

$$\int_0^X \frac{du}{e^u + a} = \frac{1}{a} (\ln(1 + a) - \ln(1 + ae^{-X})) \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + a)}{a}.$$

La méthode 1 évite de deviner une primitive grâce à la décomposition

$\frac{a}{e^u + a} = 1 - \frac{e^u}{e^u + a}$; la méthode 2 repose sur la réécriture en $\frac{e^{-u}}{1 + ae^{-u}}$, de la forme $\frac{w'}{w}$ à une constante près, réflexe utile pour tout quotient faisant intervenir e^u .

Conclusion

$$J = \frac{\ln(1 + a)}{a}.$$

Question 2

On décrit l'événement $(Z \leq t) \cap (N = j)$ à l'aide de $Y_1, \dots, Y_j$, puis on utilise l'indépendance.

Interprétation de l'hypothèse d'indépendance : comme il est d'usage, « N indépendante des Y_k » signifie que, pour tout $j \geq 1$, les variables $N, Y_1, \dots, Y_j$ sont mutuellement indépendantes.

Comme N suit la loi géométrique de paramètre $s \in]0, 1[$, $P(N = j) = s(1 - s)^{j-1} > 0$, donc la probabilité conditionnelle est bien définie.

Sur l'événement $(N = j)$, $Z = \max(Y_1, \dots, Y_j)$, et un maximum de réels est inférieur ou égal à t si et seulement si chacun d'eux l'est. Donc

$$(Z \leq t) \cap (N = j) = (Y_1 \leq t) \cap \dots \cap (Y_j \leq t) \cap (N = j).$$

Par indépendance mutuelle de $N, Y_1, \dots, Y_j$, et puisque $P(Y_i \leq t) = 1 - e^{-bt}$ pour $t \geq 0$:

$$P((Z \leq t) \cap (N = j)) = P(N = j) \prod_{i=1}^j P(Y_i \leq t) = P(N = j) (1 - e^{-bt})^j.$$

Conclusion

pour tout entier $j \geq 1$ et tout réel $t \geq 0$, $P(Z \leq t \mid N = j) = (1 - e^{-bt})^j$.

Question 3 a)

On applique la formule des probabilités totales avec le système quasi-complet d'événements $(N = j)_{j \geq 1}$: ces événements sont deux à deux incompatibles et

$$P(N \geq 1) = \sum_{j \geq 1} s(1 - s)^{j-1} = 1.$$

Cas $t < 0$. Comme $N \geq 1$, on a $Z \geq Y_1$, donc $(Z \leq t) \subset (Y_1 \leq t)$ et $P(Z \leq t) \leq P(Y_1 \leq t) = 0$. Ainsi $F_Z(t) = 0$.

Cas $t \geq 0$. Posons $x = 1 - e^{-bt} \in [0, 1[$. Alors

$$F_Z(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(N = j) P(Z \leq t \mid N = j) = \sum_{j=1}^{+\infty} s(1 - s)^{j-1} x^j = sx \sum_{j=0}^{+\infty} ((1 - s)x)^j.$$

Comme $0 \leq (1 - s)x < 1$, la série géométrique converge et $F_Z(t) = \frac{sx}{1 - (1 - s)x}$. Or $1 - (1 - s)x = 1 - (1 - s) + (1 - s)e^{-bt} = s + (1 - s)e^{-bt}$.

Conclusion

$$F_Z(t) = 0 \text{ si } t < 0, \text{ et } F_Z(t) = \frac{s(1 - e^{-bt})}{s + (1 - s)e^{-bt}} \text{ si } t \geq 0.$$

Question 3 b)

On vérifie la régularité de F_Z et on dérive en dehors de 0.

F_Z est nulle sur $] -\infty, 0[$, et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ comme quotient de fonctions de classe C^1 dont le dénominateur $s + (1 - s)e^{-bt}$ est strictement positif. En 0, la formule donne $F_Z(0) = 0$ et elle est continue sur $[0, +\infty[$, donc F_Z est continue en 0, donc sur $\mathbb{R}$.

Pour $t > 0$, notons $D(t) = s + (1 - s)e^{-bt}$, de dérivée $D'(t) = -b(1 - s)e^{-bt}$. Alors

$$\begin{aligned} F'_Z(t) &= \frac{sbe^{-bt}D(t) + s(1 - e^{-bt})b(1 - s)e^{-bt}}{D(t)^2} \\ &= \frac{sbe^{-bt}(s + (1 - s)e^{-bt} + (1 - s) - (1 - s)e^{-bt})}{D(t)^2} = \frac{sbe^{-bt}}{D(t)^2}. \end{aligned}$$

Conclusion

Z a pour densité la fonction f définie par $f(t) = 0$ si $t < 0$ et $f(t) = \frac{sbe^{-bt}}{(s + (1 - s)e^{-bt})^2}$ si $t \geq 0$ (la valeur en 0 est arbitraire).

Question 4

Existence. La fonction $t \mapsto tf(t)$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$ et nulle sur $] -\infty, 0[$.

Pour $t \geq 0$, $s + (1 - s)e^{-bt} \geq s > 0$, donc $0 \leq tf(t) \leq \frac{b}{s} te^{-bt}$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} te^{-bt} dt$

converge (c'est $\frac{1}{b}$ fois l'espérance d'une variable de loi exponentielle de paramètre b).

Par comparaison de fonctions positives, $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$ converge absolument : Z admet

une espérance, égale à $\int_0^{+\infty} tf(t) dt$.

Étape commune : intégration par parties sur un segment. Posons $G(t) = 1 - F_Z(t)$ pour $t \geq 0$. Alors

$$G(t) = \frac{s + (1-s)e^{-bt} - s + se^{-bt}}{s + (1-s)e^{-bt}} = \frac{e^{-bt}}{s + (1-s)e^{-bt}} = \frac{1}{se^{bt} + 1 - s},$$

et $G' = -f$ sur $]0, +\infty[$. Les fonctions $t \mapsto t$ et G étant de classe C^1 sur $[0, X]$ (avec G prolongée en 0 par sa formule), pour $X > 0$:

$$\int_0^X tf(t) dt = [-tG(t)]_0^X + \int_0^X G(t) dt = -XG(X) + \int_0^X G(t) dt.$$

Comme $0 \leq XG(X) \leq \frac{Xe^{-bX}}{s}$, on a $XG(X) \rightarrow 0$ par croissances comparées. Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} G(t) dt$ converge et $E(Z) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{se^{bt} + 1 - s}$.

Méthode 1 — Retour à l'intégrale J . Par le changement de variable affine $u = bt$ sur $[0, X]$, puis passage à la limite :

$$E(Z) = \frac{1}{b} \int_0^{+\infty} \frac{du}{se^u + 1 - s} = \frac{1}{bs} \int_0^{+\infty} \frac{du}{e^u + \frac{1-s}{s}}.$$

On reconnaît J avec $a = \frac{1-s}{s} > 0$. D'après 1) b), cette intégrale vaut

$$\frac{\ln(1+a)}{a} = \frac{s}{1-s} \ln\left(\frac{1}{s}\right). \text{ Donc } E(Z) = \frac{1}{bs} \cdot \frac{s(-\ln s)}{1-s} = \frac{-\ln s}{b(1-s)}.$$

Méthode 2 — Primitive directe. On a $G(t) = \frac{e^{-bt}}{s + (1-s)e^{-bt}}$, et la fonction

$H : t \mapsto -\frac{1}{b(1-s)} \ln(s + (1-s)e^{-bt})$ **vérifie**

$$H'(t) = -\frac{1}{b(1-s)} \cdot \frac{-b(1-s)e^{-bt}}{s + (1-s)e^{-bt}} = G(t). \text{ Donc}$$

$$\int_0^X G(t) dt = H(X) - H(0) = -\frac{1}{b(1-s)} \ln(s + (1-s)e^{-bX}) \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} -\frac{\ln s}{b(1-s)},$$

puisque $H(0) = -\frac{\ln 1}{b(1-s)} = 0$.

La méthode 1 exploite la question 1), ce qui est l'intention du sujet ; la méthode 2 est autonome et montre que la fonction de survie G admet une primitive explicite.

Conclusion

$$Z \text{ admet une espérance et } E(Z) = \frac{-\ln(s)}{b(1-s)}.$$

Question 5 a)

Pour $t > 0$, en multipliant numérateur et dénominateur par e^t , $g(t) = \frac{t}{e^t - 1}$.

Continuité. Sur $]0, +\infty[$, g est continue comme quotient de fonctions continues dont le

dénominateur ne s'annule pas. En 0 : $\frac{e^t - 1}{t} \rightarrow \exp'(0) = 1$ quand $t \rightarrow 0^+$ (taux d'accroissement), donc $g(t) = \frac{1}{(e^t - 1)/t} \rightarrow 1 = g(0)$. Ainsi g est continue sur $[0, +\infty[$.

Caractère borné. On a $g \geq 0$ sur $[0, +\infty[$.

Méthode 1 — Inégalité de convexité. La fonction $\exp$ est convexe, donc au-dessus de sa tangente en 0 : $e^t \geq 1 + t$ pour tout réel t . Pour $t > 0$, $e^t - 1 \geq t > 0$, donc $0 < g(t) \leq 1$. Avec $g(0) = 1$, on obtient $0 \leq g \leq 1$ sur $[0, +\infty[$.

Méthode 2 — Continuité et limite à l'infini. Par croissances comparées,

$g(t) = \frac{te^{-t}}{1 - e^{-t}} \rightarrow \frac{0}{1} = 0$ quand $t \rightarrow +\infty$. Il existe donc $A > 0$ tel que $0 \leq g(t) \leq 1$ pour $t \geq A$. Sur le segment $[0, A]$, la fonction continue g est bornée. Donc g est bornée sur $[0, +\infty[$.

La méthode 1 fournit un majorant explicite, utile en question 7) ; la méthode 2 est le raisonnement général pour une fonction continue ayant une limite finie à l'infini.

Conclusion

g est continue et bornée sur $[0, +\infty[$, avec $0 \leq g \leq 1$.

Question 5 b)

Cas $t = 0$. Le membre de droite vaut

$$g(0) \cdot 1 + \sum_{k=0}^n 0 = 1 = g(0).$$

Cas $t > 0$. On a $0 < e^{-t} < 1$, donc par la formule de la somme géométrique :

$$\sum_{k=0}^n te^{-(k+1)t} = te^{-t} \sum_{k=0}^n (e^{-t})^k = te^{-t} \cdot \frac{1 - e^{-(n+1)t}}{1 - e^{-t}} = g(t)(1 - e^{-(n+1)t}).$$

Donc

$$g(t)e^{-(n+1)t} + \sum_{k=0}^n te^{-(k+1)t} = g(t).$$

Conclusion

l'égalité est établie pour tout $t \geq 0$ et tout entier $n \geq 0$.

Question 6

Soit $k \geq 0$ et $c = k + 1 > 0$. La fonction $t \mapsto te^{-ct}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$.

Méthode 1 — Intégration par parties sur un segment. Pour $X > 0$, avec les fonctions de classe C^1 $t \mapsto t$ et $t \mapsto -\frac{1}{c}e^{-ct}$:

$$\int_0^X te^{-ct} dt = \left[-\frac{t}{c}e^{-ct} \right]_0^X + \frac{1}{c} \int_0^X e^{-ct} dt = -\frac{X}{c}e^{-cX} + \frac{1}{c^2}(1 - e^{-cX}).$$

Par croissances comparées, $Xe^{-cX} \rightarrow 0$, donc l'intégrale converge et vaut $\frac{1}{c^2}$.

Méthode 2 — Interprétation probabiliste. Si W suit la loi exponentielle de paramètre c , de densité $t \mapsto ce^{-ct}$ sur $[0, +\infty[$, alors W admet une espérance égale à $\frac{1}{c}$: l'intégrale

$\int_0^{+\infty} t ce^{-ct} dt$ converge et vaut $\frac{1}{c}$. Par linéarité, $\int_0^{+\infty} te^{-ct} dt$ converge et vaut $\frac{1}{c^2}$.

La méthode 1 est le calcul direct ; la méthode 2 permet de conclure immédiatement en reconnaissant un moment d'une loi usuelle.

Conclusion

pour tout entier $k \geq 0$, l'intégrale converge et $\int_0^{+\infty} te^{-(k+1)t} dt = \frac{1}{(k+1)^2}$.

Question 7

Convergence de $\int_0^{+\infty} g$. La fonction g est continue et positive sur $[0, +\infty[$. Par

croissances comparées, $t^2 g(t) = \frac{t^3 e^{-t}}{1 - e^{-t}} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$, donc $g(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge (intégrale de Riemann), $\int_1^{+\infty} g$ converge par négligeabilité pour des fonctions positives; et $\int_0^1 g$ est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. Donc $\int_0^{+\infty} g(t) dt$ converge.

Intégration de l'égalité 5) b). Fixons $n \geq 0$. Les intégrales $\int_0^{+\infty} g$ et $\int_0^{+\infty} t e^{-(k+1)t} dt$ convergent, donc par linéarité $R_n = \int_0^{+\infty} g(t) e^{-(n+1)t} dt$ converge aussi, et

$$\int_0^{+\infty} g(t) dt = R_n + \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2} = R_n + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2}.$$

Majoration du reste. D'après 5) a), $0 \leq g \leq 1$, donc $0 \leq g(t) e^{-(n+1)t} \leq e^{-(n+1)t}$ et, par croissance de l'intégrale, $0 \leq R_n \leq \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t} dt = \frac{1}{n+1}$. Par encadrement, $R_n \rightarrow 0$.

Donc la suite des sommes partielles

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \int_0^{+\infty} g - R_n$$

converge vers $\int_0^{+\infty} g$.

Conclusion

$\int_0^{+\infty} g(t) dt$ converge et vaut

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Question 8

Question adaptée au programme actuel : l'indication du changement de variable non affine $s = e^{-t}$ a été ajoutée à l'énoncé.

On étudie $h : s \mapsto \frac{-\ln s}{b(1-s)}$ sur $]0, 1[$: elle y est continue et positive. L'intégrale est impropre en 0 (où $h \rightarrow +\infty$) et en 1.

Changement de variable sur un segment. Soient $0 < x < y < 1$. La fonction $\varphi : t \mapsto e^{-t}$ est de classe C^1 sur $[-\ln y, -\ln x]$, avec $\varphi(-\ln y) = y$, $\varphi(-\ln x) = x$ et $\varphi'(t) = -e^{-t}$. Alors

$$\int_x^y h(s) ds = \int_{-\ln x}^{-\ln y} h(e^{-t})(-e^{-t}) dt = \frac{1}{b} \int_{-\ln y}^{-\ln x} \frac{t e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt = \frac{1}{b} \int_{-\ln y}^{-\ln x} g(t) dt.$$

Passage à la limite. On écrit $\int_{-\ln y}^{-\ln x} g = \int_0^{-\ln x} g - \int_0^{-\ln y} g$. Quand $x \rightarrow 0^+$,

$-\ln x \rightarrow +\infty$, donc le premier terme tend vers $\int_0^{+\infty} g$, qui converge d'après la question 7). Quand $y \rightarrow 1^-$, $-\ln y \rightarrow 0^+$, donc le second terme tend vers 0, puisque

$\alpha \mapsto \int_0^\alpha g$ est continue en 0 (g étant continue sur $[0, +\infty[$). Les deux limites étant

obtenues séparément, $\int_0^1 h(s) ds$ converge et

$$\int_0^1 \frac{-\ln s}{b(1-s)} ds = \frac{1}{b} \int_0^{+\infty} g(t) dt = \frac{1}{b} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6b}.$$

Conclusion

la valeur moyenne de $E(Z)$, vue comme fonction de s sur $]0, 1[$, vaut $\frac{\pi^2}{6b}$.

Problème

Résultat préliminaire

Question adaptée au programme actuel : on a ajouté l'hypothèse $P(X = x_j) > 0$ pour tout j , sans laquelle les probabilités conditionnelles $P(Y = y_i | X = x_j)$ ne sont pas définies.

On suppose, comme le suggère l'énoncé, les x_j deux à deux distincts et les y_i deux à deux distincts.

Par le théorème de transfert, $g(Y)$ est une variable finie et

$$E(g(Y)) = \sum_{i=1}^t g(y_i) P(Y = y_i).$$

Les événements $(X = x_j)$, $1 \leq j \leq u$, forment un système complet d'événements de probabilités non nulles. Par la formule des probabilités totales, pour tout i :

$$P(Y = y_i) = \sum_{j=1}^u P(X = x_j) P(Y = y_i | X = x_j).$$

En reportant et en échangeant les deux sommes finies :

$$\begin{aligned} E(g(Y)) &= \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^u g(y_i) P(Y = y_i | X = x_j) P(X = x_j) \\ &= \sum_{j=1}^u P(X = x_j) \sum_{i=1}^t g(y_i) P(Y = y_i | X = x_j) = \sum_{j=1}^u E_j P(X = x_j). \end{aligned}$$

Conclusion

$$E(g(Y)) = \sum_{j=1}^u E_j P(X = x_j).$$

Remarque utile pour la question 9). Si X prend ses valeurs dans $\{x_1, \dots, x_u\}$ mais que certaines de ces valeurs ont une probabilité nulle, le même raisonnement, appliqué au système quasi-complet $(X = x_j)_{j \in J_+}$ où $J_+ = \{j : P(X = x_j) > 0\}$, donne

$$E(g(Y)) = \sum_{j \in J_+} E_j P(X = x_j).$$

Question 1 a)

Modélisation de la génération $k + 1$: elle est formée des m copies de chacune des n disquettes tirées dans la génération k . Elle contient donc exactement mT_k disquettes infectées parmi nm .

T_k compte des disquettes infectées parmi n disquettes tirées, donc T_k prend ses valeurs dans $\{0, 1, \dots, n\}$. On montre à la fin de la question 1) b) que chacune de ces valeurs a une probabilité strictement positive.

Conclusion

$$T_k(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}.$$

Question 1 b)

Sachant $(T_k = j)$, la génération $k + 1$ contient jm disquettes infectées sur nm , soit une proportion $\frac{jm}{nm} = \frac{j}{n}$. Les n tirages avec remise dans cette génération sont des épreuves de Bernoulli indépendantes de même probabilité de succès « disquette infectée » égale à $\frac{j}{n}$, et T_{k+1} compte le nombre de succès.

Conclusion

sachant $(T_k = j)$, T_{k+1} suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{j}{n}\right)$:

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad P(T_{k+1} = i \mid T_k = j) = \binom{n}{i} \left(\frac{j}{n}\right)^i \left(1 - \frac{j}{n}\right)^{n-i}.$$

Pour $j = 0$ (respectivement $j = n$), il s'agit de la loi certaine égale à 0 (respectivement à n), avec la convention $0^0 = 1$.

De même, la génération 0 contient une proportion p de disquettes infectées, donc T_0 suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Positivité des probabilités. Montrons par récurrence que $P(T_k = i) > 0$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$. Pour $k = 0$, c'est vrai car $0 < p < 1$. Si c'est vrai au rang k , les lois conditionnelles ci-dessus sont bien définies et, par la formule des probabilités totales,

$$P(T_{k+1} = i) \geq P(T_k = 1)P(T_{k+1} = i \mid T_k = 1) = P(T_k = 1) \binom{n}{i} \left(\frac{1}{n}\right)^i \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-i} > 0,$$

puisque $0 < \frac{1}{n} < 1$. Le préliminaire s'applique donc au couple (T_k, T_{k+1}) avec $x_j = j$, $j \in \{0, \dots, n\}$.

Question 2 a)

On applique le préliminaire avec $X = T_k$, $Y = T_{k+1}$ et $g : y \mapsto y$.

Pour $j \in \{0, \dots, n\}$,

$$E_j = \sum_{i=0}^n iP(T_{k+1} = i \mid T_k = j)$$

est l'espérance de la loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{j}{n}\right)$, soit $E_j = n \cdot \frac{j}{n} = j$. Donc

$$E(T_{k+1}) = \sum_{j=0}^n jP(T_k = j) = E(T_k).$$

Conclusion

pour tout $k \geq 0$, $E(T_{k+1}) = E(T_k)$.

Question 2 b)

La suite $(E(T_k))_{k \geq 0}$ est constante d'après 2) a), donc $E(T_k) = E(T_0)$. Comme $T_0 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, $E(T_0) = np$.

Conclusion

pour tout entier $k \geq 0$, $E(T_k) = np$.

Question 3 a)

On applique le préliminaire au couple (T_k, T_{k+1}) avec $g : y \mapsto y(n - y)$, de sorte que $g(T_{k+1}) = Z_{k+1}$.

Calcul préalable. Soit W une variable de loi $\mathcal{B}(n, q)$ avec $q \in [0, 1]$. On a $E(W) = nq$ et $V(W) = nq(1 - q)$, donc par la formule de Koenig-Huygens $E(W^2) = nq(1 - q) + n^2q^2$. Par linéarité :

$$\begin{aligned} E(W(n - W)) &= nE(W) - E(W^2) = n^2q - nq + nq^2 - n^2q^2 = n(n - 1)q - n(n - 1)q^2 \\ &= n(n - 1)q(1 - q). \end{aligned}$$

Pour $j \in \{0, \dots, n\}$, par le théorème de transfert,

$$E_j = \sum_{i=0}^n i(n - i)P(T_{k+1} = i \mid T_k = j)$$

est égal à $E(W(n - W))$ pour $W \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{j}{n}\right)$. Donc

$$E_j = n(n - 1) \cdot \frac{j}{n} \cdot \frac{n - j}{n} = \frac{n - 1}{n} j(n - j).$$

Par le préliminaire puis le théorème de transfert :

$$E(Z_{k+1}) = \sum_{j=0}^n \frac{n - 1}{n} j(n - j) P(T_k = j) = \frac{n - 1}{n} E(T_k(n - T_k)) = \frac{n - 1}{n} E(Z_k).$$

Conclusion

la suite $(E(Z_k))_{k \geq 0}$ est géométrique de raison $\frac{n - 1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$.

Question 3 b)

D'après le calcul préalable de 3) a) appliqué à $T_0 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, $E(Z_0) = n(n - 1)p(1 - p)$.

Conclusion

pour tout $k \geq 0$, $E(Z_k) = n(n - 1)p(1 - p) \left(\frac{n - 1}{n}\right)^k$.

Question 3 c)

Comme $n \geq 2$, $0 < \frac{n - 1}{n} < 1$, donc $\left(\frac{n - 1}{n}\right)^k \rightarrow 0$.

Conclusion

$E(Z_k) \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow +\infty$.

Question 4 a)

$Z_k = T_k(n - T_k) = 0$ si et seulement si $T_k = 0$ ou $T_k = n$.

Conclusion

l'événement $(Z_k = 0)$ signifie que les n disquettes tirées dans la génération k sont toutes saines ou toutes infectées ; autrement dit, la génération $k + 1$ est homogène : entièrement saine ou entièrement infectée.

Question 4 b)

Pour $j \in \{1, \dots, n-1\}$, on a l'identité

$j(n-j) - (n-1) = jn - j^2 - n + 1 = (j-1)(n-1-j)$, vérifiée en développant le membre de droite : $(j-1)(n-1-j) = jn - j - j^2 - n + 1 + j = jn - j^2 - n + 1$. Les deux facteurs $j-1$ et $n-1-j$ sont positifs, donc $j(n-j) \geq n-1$, avec égalité pour $j=1$ (et $j=n-1$).

Conclusion

la plus petite valeur de $j(n-j)$ sur $\{1, \dots, n-1\}$ est $n-1$.

Question 4 c)

On minore $E(Z_k)$ par un multiple de $P(0 < T_k < n)$.

Méthode 1 — Par le théorème de transfert. Les termes $j=0$ et $j=n$ étant nuls et les autres minorés grâce à 4) b) :

$$\begin{aligned} E(Z_k) &= \sum_{j=0}^n j(n-j)P(T_k = j) = \sum_{j=1}^{n-1} j(n-j)P(T_k = j) \geq (n-1) \sum_{j=1}^{n-1} P(T_k = j) \\ &= (n-1)P(0 < T_k < n). \end{aligned}$$

Méthode 2 — Par l'inégalité de Markov. La variable Z_k est positive et admet une espérance. D'après 4) b), si $0 < T_k < n$ alors $Z_k \geq n - 1$, donc

$(0 < T_k < n) \subset (Z_k \geq n - 1)$. L'inégalité de Markov donne

$$P(0 < T_k < n) \leq P(Z_k \geq n - 1) \leq \frac{E(Z_k)}{n - 1}.$$

La méthode 1 montre d'où vient l'inégalité; la méthode 2 l'obtient directement par un outil général, réutilisable dès qu'une variable positive est minorée sur un événement.

Dans les deux cas, $0 \leq P(0 < T_k < n) \leq \frac{E(Z_k)}{n - 1} = np(1 - p) \left(\frac{n - 1}{n}\right)^k$, et le majorant tend vers 0 d'après 3) c).

Conclusion

par encadrement, $P(0 < T_k < n) \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow +\infty$.

Question 4 d)

L'événement $(Z_k = 0) = (T_k = 0) \cup (T_k = n)$ est le contraire de $(0 < T_k < n)$, puisque T_k prend ses valeurs dans $\{0, \dots, n\}$. Donc $P(Z_k = 0) = 1 - P(0 < T_k < n) \rightarrow 1$.

Conclusion

$\lim_{k \rightarrow +\infty} P(Z_k = 0) = 1$. Interprétation : lorsque le nombre de générations augmente, il devient presque certain que la génération obtenue soit homogène, entièrement saine ou entièrement infectée. Ce résultat ne dit pas lequel de ces deux cas se produit.

Question 4 e)

On cherche une condition suffisante, ne dépendant que de n , pour que $P(0 < T_k < n) < 0,01$.

D'après 4) c), $P(0 < T_k < n) \leq np(1 - p) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$. Or

$$p(1 - p) = \frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}, \text{ donc}$$

$$P(0 < T_k < n) \leq \frac{n}{4} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k.$$

Par ailleurs, la fonction $\ln$ étant concave, elle est sous sa tangente en 1 : $\ln(1+x) \leq x$ pour $x > -1$. Avec $x = -\frac{1}{n}$, on obtient $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq -\frac{1}{n}$, donc $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \leq e^{-k/n}$.

Si $k > n \ln(25n)$, alors $e^{-k/n} < \frac{1}{25n}$, donc $P(0 < T_k < n) < \frac{n}{4} \cdot \frac{1}{25n} = \frac{1}{100}$ et $P(Z_k = 0) = 1 - P(0 < T_k < n) > 0,99$.

Conclusion

$k = \lfloor n \ln(25n) \rfloor + 1$ convient. On peut aussi prendre le plus petit entier k strictement supérieur à $\frac{\ln(25n)}{\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)}$, qui est la condition exacte $\frac{n}{4} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k < \frac{1}{100}$.

Question 5 a)

Si $T_k = n$, les n disquettes tirées dans la génération k sont infectées, donc la génération $k+1$, formée de leurs copies, ne contient que des disquettes infectées. Les n disquettes tirées dans la génération $k+1$ sont alors toutes infectées : $T_{k+1} = n$. Ceci est cohérent avec 1) b) : $P(T_{k+1} = n \mid T_k = n) = 1$.

Conclusion

pour tout k , $(T_k = n) \subset (T_{k+1} = n)$: la suite d'événements est croissante pour l'inclusion.

Question 5 b)

Pour $\ell \geq 1$, la génération ℓ est entièrement infectée si et seulement si $T_{\ell-1} = n$. La génération 0 n'est pas entièrement infectée puisque $p < 1$. Donc

$$F = \bigcup_{k_0 \geq 0} \bigcap_{k \geq k_0} (T_k = n).$$

Par croissance de la suite d'événements, $\bigcap_{k \geq k_0} (T_k = n) = (T_{k_0} = n)$: en effet l'inclusion directe est claire et, si $T_{k_0} = n$, alors $T_k = n$ pour tout $k \geq k_0$ par récurrence. Ainsi $F = \bigcup_{k \geq 0} (T_k = n)$.

Par le théorème de continuité monotone (croissante), $P(F) = \lim_{k \rightarrow +\infty} P(T_k = n)$.

Conclusion

la suite $(P(T_k = n))$ est croissante et $P(F)$ est sa limite.

Question 6

Pour $0 < j < n$, $(T_k = j) \subset (0 < T_k < n)$, donc $0 \leq P(T_k = j) \leq P(0 < T_k < n)$.

Conclusion

par encadrement et 4) c), $\lim_{k \rightarrow +\infty} P(T_k = j) = 0$.

Question 7

D'après 2) b), pour tout k :

$$np = E(T_k) = \sum_{j=1}^{n-1} jP(T_k = j) + nP(T_k = n).$$

La somme finie

$$\sum_{j=1}^{n-1} jP(T_k = j)$$

tend vers 0 d'après 6). Donc

$$nP(T_k = n) = np - \sum_{j=1}^{n-1} jP(T_k = j) \rightarrow np,$$

soit $P(T_k = n) \rightarrow p$.

Conclusion

d'après 5) b), $P(F) = p$.

Question 8 a)

On procède comme en 5) et 7) avec la valeur 0.

Si $T_k = 0$, la génération $k + 1$ est entièrement saine, donc $T_{k+1} = 0$: la suite $((T_k = 0))$ est croissante pour l'inclusion. La génération 0 n'est pas entièrement saine puisque $p > 0$, et la génération $\ell \geq 1$ est entièrement saine si et seulement si $T_{\ell-1} = 0$. Comme en 5) b), $G = \bigcup_{k \geq 0} (T_k = 0)$ et, par continuité monotone, $P(G) = \lim_{k \rightarrow +\infty} P(T_k = 0)$.

Or $P(T_k = 0) = 1 - P(T_k = n) - P(0 < T_k < n)$, qui tend vers $1 - p - 0 = 1 - p$ d'après 7) et 4) c).

Conclusion

$P(G) = 1 - p$. On remarque que F et G sont incompatibles et que $P(F) + P(G) = 1$: presque sûrement, le lot finit par devenir homogène.

Question 8 b)

La méthode aboutit presque sûrement à un lot homogène : sain avec probabilité $1 - p$, entièrement contaminé avec probabilité p . Si p est faible, on a effectivement de bonnes chances d'obtenir un lot sain, ce qui va dans le sens de la conjecture.

Mais la méthode n'assainit rien en moyenne : le nombre moyen de disquettes infectées tirées reste égal à np à chaque génération (question 2) b)), donc la proportion moyenne de copies infectées reste p . Elle remplace une contamination partielle certaine par un pari : avec probabilité p , la totalité du lot est contaminée. De plus, comme on ne peut pas distinguer une copie saine d'une copie contaminée, on ignore à l'issue du processus lequel des deux cas s'est produit.

Conclusion

la méthode ne réduit pas le risque moyen ; elle n'est intéressante que si l'on accepte un risque p de perdre tout le lot, ce qui la rend peu satisfaisante.

Question 9

Dans ce modèle, les n disquettes sont tirées sans remise dans une génération de nm disquettes, ce qui est possible car $n \leq nm$. On suppose implicitement, comme dans tout l'énoncé, que le nombre $K_0 = Np = nmp$ de disquettes infectées de la génération 0 est un entier.

Loi hypergéométrique. Dans une population de M objets dont K sont marqués, on tire n objets sans remise ($2 \leq n \leq M$), et l'on note W le nombre d'objets marqués obtenus. Cette loi ne figure pas parmi les lois usuelles du programme : on l'établit par dénombrement. Avec la convention $\binom{a}{b} = 0$ si $b < 0$ ou $b > a$, l'univers des parties à n éléments, muni de l'équiprobabilité, donne

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad P(W = i) = \frac{\binom{K}{i} \binom{M-K}{n-i}}{\binom{M}{n}}.$$

Calcul de $E(W)$ et de $E(W(n-W))$.

Méthode 1 — Dénombrement et formule de Vandermonde. En comptant les parties à r éléments d'un ensemble à M' éléments selon le nombre i d'éléments pris dans une partie fixée à K' éléments, on obtient la formule de Vandermonde

$$\sum_i \binom{K'}{i} \binom{M'-K'}{r-i} = \binom{M'}{r}.$$

Avec $i \binom{K}{i} = K \binom{K-1}{i-1}$:

$$E(W) = \frac{K}{\binom{M}{n}} \sum_i \binom{K-1}{i-1} \binom{M-K}{n-i} = \frac{K \binom{M-1}{n-1}}{\binom{M}{n}} = \frac{nK}{M}.$$

Avec $i(i-1)\binom{K}{i} = K(K-1)\binom{K-2}{i-2}$ (les deux membres sont nuls si $K \leq 1$) :

$$E(W(W-1)) = \frac{K(K-1) \binom{M-2}{n-2}}{\binom{M}{n}} = \frac{n(n-1)K(K-1)}{M(M-1)}.$$

Par linéarité,

$$\begin{aligned} E(W(n-W)) &= (n-1)E(W) - E(W(W-1)) = \frac{n(n-1)K}{M} \left(1 - \frac{K-1}{M-1}\right) \\ &= \frac{n(n-1)K(M-K)}{M(M-1)}. \end{aligned}$$

Méthode 2 — Variables indicatrices. On réalise le tirage de façon ordonnée : l'univers est l'ensemble des n -listes d'objets distincts, muni de l'équiprobabilité ; le nombre d'objets marqués a la même loi que dans le tirage simultané. Notons A_r l'événement « le r -ième objet tiré est marqué ». En dénombrant,

$$P(A_r) = \frac{K \cdot (M-1)(M-2) \cdots (M-n+1)}{M(M-1) \cdots (M-n+1)} = \frac{K}{M} \text{ et, pour } r \neq r',$$

$$P(A_r \cap \overline{A_{r'}}) = \frac{K(M-K)}{M(M-1)}. \text{ Comme}$$

$$W = \sum_{r=1}^n \mathbf{1}_{A_r}$$

et

$$n - W = \sum_{r'=1}^n \mathbf{1}_{\overline{A_{r'}}},$$

et que $\mathbf{1}_{A_r} \mathbf{1}_{\overline{A_r}} = 0$:

$$E(W) = \sum_{r=1}^n P(A_r) = \frac{nK}{M}$$

et

$$E(W(n - W)) = \sum_{r \neq r'} P(A_r \cap \overline{A_{r'}}) = \frac{n(n-1)K(M-K)}{M(M-1)}.$$

La méthode 1 est un calcul direct sur la loi ; la méthode 2 évite le calcul de la loi et montre que, sans remise, chaque tirage pris isolément suit la même loi de Bernoulli qu'avec remise, seule la dépendance entre deux tirages étant modifiée.

Reprise de 1). T_k prend ses valeurs dans $\{0, \dots, n\}$ (certaines valeurs peuvent désormais avoir une probabilité nulle, par exemple si $nmp < n$, auquel cas $T_0 \leq nmp < n$). Sachant $(T_k = j)$, avec $P(T_k = j) > 0$, la génération $k+1$ contient jm disquettes infectées sur nm , donc T_{k+1} suit la loi hypergéométrique de paramètres $M = nm$, $K = jm$, n :

$$P(T_{k+1} = i \mid T_k = j) = \frac{\binom{jm}{i} \binom{(n-j)m}{n-i}}{\binom{nm}{n}},$$

pour $i \in \{0, \dots, n\}$.

De même, T_0 suit la loi hypergéométrique de paramètres $M = nm$, $K = nmp$, n .

Reprise de 2). On applique le préliminaire sous la forme de la remarque (somme sur les j tels que $P(T_k = j) > 0$). Avec $g : y \mapsto y$, $E_j = \frac{n \cdot jm}{nm} = j$, donc

$$E(T_{k+1}) = \sum_j jP(T_k = j) = E(T_k).$$

Ainsi $E(T_k) = E(T_0) = \frac{n \cdot nmp}{nm} = np$: le résultat de 2) est inchangé.

Reprise de 3). Avec $g : y \mapsto y(n - y)$:

$$E_j = \frac{n(n-1)jm(n-j)m}{nm(nm-1)} = \frac{m(n-1)}{nm-1} j(n-j).$$

Notons $\rho = \frac{m(n-1)}{nm-1}$. Par le préliminaire, $E(Z_{k+1}) = \rho E(Z_k)$: la suite $(E(Z_k))$ est géométrique de raison ρ . De plus

$$E(Z_0) = \frac{n(n-1)nmpnm(1-p)}{nm(nm-1)} = n(n-1)p(1-p)\frac{nm}{nm-1},$$

d'où

$$E(Z_k) = n(n-1)p(1-p)\frac{nm}{nm-1} \left(\frac{m(n-1)}{nm-1} \right)^k.$$

Comme $m > 1$, $m(n-1) = nm - m < nm - 1$, donc $0 < \rho < 1$ et $E(Z_k) \rightarrow 0$: le résultat de 3) c) est inchangé.

Influence sur les résultats. On compare les raisons :

$$\rho - \frac{n-1}{n} = (n-1) \left(\frac{m}{nm-1} - \frac{1}{n} \right) = \frac{n-1}{n(nm-1)} > 0,$$

donc la convergence de $E(Z_k)$ vers 0 est un peu plus lente sans remise.

Les questions 4) à 8) n'utilisent que trois faits : $E(T_k) = np$, $E(Z_k) \rightarrow 0$ et les inclusions $(T_k = n) \subset (T_{k+1} = n)$, $(T_k = 0) \subset (T_{k+1} = 0)$, qui restent vraies sans remise (une génération homogène ne produit que des générations homogènes du même type). On obtient donc encore $P(0 < T_k < n) \leq \frac{E(Z_k)}{n-1} \rightarrow 0$, $P(F) = p$ et $P(G) = 1 - p$.

Seule la valeur numérique de 4) e) change. Une valeur ne dépendant que de n existe encore : comme $m \geq 2$, on a $\frac{nm}{nm-1} \leq \frac{2n}{2n-1} \leq \frac{4}{3}$ et

$$\rho = \frac{n-1}{n-\frac{1}{m}} \leq \frac{n-1}{n-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2n-1}. \text{ Donc}$$

$P(0 < T_k < n) \leq \frac{n}{4} \cdot \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)^k \leq \frac{n}{3} e^{-k/(2n-1)}$, et $k = \lfloor (2n-1) \ln(100n/3) \rfloor + 1$ assure $P(Z_k = 0) > 0,99$.

Conclusion

le mode de tirage ne modifie ni $E(T_k) = np$, ni la limite nulle de $E(Z_k)$, ni les valeurs $P(F) = p$ et $P(G) = 1 - p$; il modifie seulement la raison de la suite géométrique ($E(Z_k)$), donc la vitesse de convergence et le nombre de générations nécessaire en 4) e). Les conclusions sur la méthode du statisticien sont inchangées.

Relevé des adaptations

Exercice 2, question 8 : ajout de l'indication « On pourra utiliser le changement de variable $s = e^{-t}$ ». Justification : le référentiel demande d'indiquer dans l'énoncé les changements de variable non affines nécessaires.

Problème, résultat préliminaire : ajout de l'hypothèse $P(X = x_j) > 0$ pour tout j . Justification : les probabilités conditionnelles $P(Y = y_i | X = x_j)$ ne sont définies que sous cette condition ; une remarque du corrigé étend le résultat au cas où certaines valeurs sont de probabilité nulle, nécessaire en question 9).

Problème, question 9 : énoncé inchangé ; la loi hypergéométrique, absente des lois usuelles du référentiel, est établie par dénombrement, et ses moments sont calculés par la formule de Vandermonde ou par des variables indicatrices.