



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

1998

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

CORRIGÉ

EXERCICE 1

Notations communes. Pour tout $n \geq 1$, X_n prend ses valeurs dans $\{-1, 1\}$, donc

$$Z_n = \prod_{i=1}^n X_i$$

prend aussi ses valeurs dans $\{-1, 1\}$ (un produit de nombres égaux à ± 1 vaut ± 1). On a de plus $Z_{n+1} = Z_n X_{n+1}$.

1.(a) Il s'agit de calculer la somme des probabilités des deux valeurs possibles de Z_n .

Comme $Z_n(\Omega) \subset \{-1, 1\}$, les événements $\{Z_n = -1\}$ et $\{Z_n = 1\}$ sont incompatibles et leur réunion est Ω : ils forment un système complet d'événements. Donc :

$$a_n + b_n = P(Z_n = -1) + P(Z_n = 1) = P(\Omega) = 1.$$

Conclusion

pour tout $n \geq 1$, $a_n + b_n = 1$.

1.(b) On exprime a_{n+1} et b_{n+1} en décomposant selon la valeur de Z_n et celle de X_{n+1} .

Comme $Z_{n+1} = Z_n X_{n+1}$ avec $Z_n, X_{n+1} \in \{-1, 1\}$, on a $Z_{n+1} = -1$ si et seulement si Z_n et X_{n+1} sont de signes contraires :

$$\{Z_{n+1} = -1\} = (\{Z_n = -1\} \cap \{X_{n+1} = 1\}) \cup (\{Z_n = 1\} \cap \{X_{n+1} = -1\}),$$

et cette réunion est disjointe.

La variable Z_n est une fonction de $(X_1, \dots, X_n)$; les variables $X_1, \dots, X_{n+1}$ étant mutuellement indépendantes, le lemme des coalitions assure que Z_n et X_{n+1} sont indépendantes. Donc :

$$a_{n+1} = P(Z_n = -1)P(X_{n+1} = 1) + P(Z_n = 1)P(X_{n+1} = -1) = (1-p)a_n + p b_n.$$

De même,

$$\{Z_{n+1} = 1\} = (\{Z_n = -1\} \cap \{X_{n+1} = -1\}) \cup (\{Z_n = 1\} \cap \{X_{n+1} = 1\})$$

(réunion disjointe), d'où :

$$b_{n+1} = p a_n + (1-p)b_n.$$

Ces deux égalités s'écrivent matriciellement :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Conclusion

la relation demandée est établie pour tout $n \geq 1$.

2.(a) On raisonne par récurrence sur $n \geq 1$ sur la propriété $\mathcal{H}_n$: « il existe un réel

$$p_n \in]0, 1[\text{ tel que } Q^n = \begin{pmatrix} 1-p_n & p_n \\ p_n & 1-p_n \end{pmatrix} \text{ »}.$$

Initialisation : $Q^1 = Q$, donc $\mathcal{H}_1$ est vraie avec $p_1 = p \in]0, 1[$.

Hérédité : supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. Alors :

$$Q^{n+1} = Q^n Q = \begin{pmatrix} 1-p_n & p_n \\ p_n & 1-p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}.$$

Le coefficient en position (1, 2) vaut $(1-p_n)p + p_n(1-p)$, celui en position (1, 1) vaut $(1-p_n)(1-p) + p_np$. En posant

$$p_{n+1} = (1-p_n)p + p_n(1-p) = p + (1-2p)p_n,$$

on vérifie que $(1-p_n)(1-p) + p_np = 1 - [(1-p_n)p + p_n(1-p)] = 1 - p_{n+1}$, car la somme des deux expressions vaut $(1-p_n) + p_n = 1$. Par symétrie du calcul, le coefficient (2, 1) vaut $p_n(1-p) + (1-p_n)p = p_{n+1}$ et le coefficient (2, 2) vaut $p_np + (1-p_n)(1-p) = 1 - p_{n+1}$. Ainsi Q^{n+1} a la forme voulue.

Reste à voir que $0 < p_{n+1} < 1$. L'écriture $p_{n+1} = (1-p_n)p + p_n(1-p)$ montre que p_{n+1} est une moyenne pondérée de p et $1-p$, à coefficients $1-p_n$ et p_n positifs de somme 1. Donc p_{n+1} est compris entre $\min(p, 1-p)$ et $\max(p, 1-p)$, qui appartiennent tous deux à $]0, 1[$. D'où $0 < p_{n+1} < 1$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion

pour tout $n \geq 1$, $Q^n = \begin{pmatrix} 1-p_n & p_n \\ p_n & 1-p_n \end{pmatrix}$ avec $0 < p_n < 1$, et

$$\forall n \geq 1, \quad p_{n+1} = (1-2p)p_n + p, \quad p_1 = p.$$

2.(b) On cherche p_n explicitement.

Méthode 1 — Suite arithmético-géométrique.

La suite (p_n) vérifie $p_{n+1} = (1 - 2p)p_n + p$. Cherchons le point fixe ℓ :

$\ell = (1 - 2p)\ell + p \iff 2p\ell = p \iff \ell = \frac{1}{2}$ (car $p \neq 0$). Posons $w_n = p_n - \frac{1}{2}$. Alors :

$$w_{n+1} = (1 - 2p)p_n + p - \frac{1}{2} = (1 - 2p) \left(p_n - \frac{1}{2} \right) = (1 - 2p)w_n.$$

La suite (w_n) est géométrique de raison $1 - 2p$ et de premier terme

$w_1 = p - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(1 - 2p)$. Donc $w_n = (1 - 2p)^{n-1}w_1 = -\frac{1}{2}(1 - 2p)^n$, et :

$$\forall n \geq 1, \quad p_n = \frac{1 - (1 - 2p)^n}{2}.$$

Méthode 2 — Diagonalisation de Q .

On remarque que

$$Q \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$Q \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2p \\ -(1 - 2p) \end{pmatrix} = (1 - 2p) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont non colinéaires, donc forment une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de vecteurs propres. Avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-2p \end{pmatrix}$, on a $QP = PD$. La matrice P est inversible : on vérifie

$$P \cdot \frac{1}{2}P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I_2,$$

donc $P^{-1} = \frac{1}{2}P$. Ainsi $Q = PDP^{-1}$, et par récurrence immédiate $Q^n = PD^nP^{-1}$ (car $Q^{n+1} = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$). En notant $q = 1 - 2p$:

$$Q^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+q^n & 1-q^n \\ 1-q^n & 1+q^n \end{pmatrix}.$$

Par identification avec la question 2.(a) (coefficient $(1, 2)$), on retrouve

$$p_n = \frac{1 - (1-2p)^n}{2}.$$

La méthode 1 exploite directement la relation de récurrence obtenue en 2.(a) ; la méthode 2 ne l'utilise pas et fournit d'un coup toute la matrice Q^n : elle est préférable lorsque la structure de la matrice (ici symétrique, à sommes de lignes constantes) suggère des vecteurs propres simples.

Conclusion

$$\forall n \geq 1, p_n = \frac{1 - (1-2p)^n}{2}.$$

2.(c) Comme $0 < p < 1$, on a $-1 < 1-2p < 1$, donc $|1-2p| < 1$ et $(1-2p)^n \rightarrow 0$ (suite géométrique). Par opérations sur les limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{2}.$$

Interprétation. Montrons d'abord que $a_n = p_n$. D'après 1.(b), une récurrence immédiate donne

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = Q^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

pour $n \geq 1$ (avec $Q^0 = I_2$). Or $Z_1 = X_1$, donc $a_1 = p$, $b_1 = 1 - p$, et

$$\begin{pmatrix} p \\ 1 - p \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Par suite

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = Q^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est la deuxième colonne de Q^n , soit $a_n = p_n$ et $b_n = 1 - p_n$.

La fonction de répartition F_n de Z_n vaut donc : $F_n(t) = 0$ si $t < -1$, $F_n(t) = p_n$ si $-1 \leq t < 1$, $F_n(t) = 1$ si $t \geq 1$. Soit Z une variable de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$, de fonction de répartition F : $F(t) = 0$ si $t < -1$, $F(t) = \frac{1}{2}$ si $-1 \leq t < 1$, $F(t) = 1$ si $t \geq 1$. Pour tout réel t , $F_n(t) \rightarrow F(t)$ (les cas $t < -1$ et $t \geq 1$ sont constants, et pour $-1 \leq t < 1$, $p_n \rightarrow \frac{1}{2}$).

Conclusion

$\lim p_n = \frac{1}{2}$, et la suite (Z_n) converge en loi vers une variable de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$: pour n grand, Z_n prend les valeurs -1 et 1 avec des probabilités proches de $\frac{1}{2}$, quelle que soit la valeur de p .

3. Condition nécessaire et suffisante.

Les variables Z_1 et Z_2 sont à valeurs dans $\{-1, 1\}$; elles sont indépendantes si et seulement si $P(Z_1 = \varepsilon_1, Z_2 = \varepsilon_2) = P(Z_1 = \varepsilon_1)P(Z_2 = \varepsilon_2)$ pour tous $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$.

Condition nécessaire. On a

$\{Z_1 = -1, Z_2 = -1\} = \{X_1 = -1, X_1 X_2 = -1\} = \{X_1 = -1, X_2 = 1\}$, donc par indépendance de X_1 et X_2 , $P(Z_1 = -1, Z_2 = -1) = p(1 - p)$. D'autre part

$P(Z_1 = -1) = p$ et $P(Z_2 = -1) = a_2 = p_2 = \frac{1 - (1 - 2p)^2}{2} = 2p(1 - p)$. Si Z_1 et Z_2 sont indépendantes, $p(1 - p) = p \cdot 2p(1 - p)$; comme $p(1 - p) \neq 0$, cela donne $1 = 2p$, soit $p = \frac{1}{2}$.

Condition suffisante. Supposons $p = \frac{1}{2}$. Pour $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$, comme $\varepsilon_1^2 = 1$, on a

$\{Z_1 = \varepsilon_1, Z_2 = \varepsilon_2\} = \{X_1 = \varepsilon_1, X_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2\}$, donc $P(Z_1 = \varepsilon_1, Z_2 = \varepsilon_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Par ailleurs $P(Z_1 = \varepsilon_1) = \frac{1}{2}$ et, comme $p_2 = \frac{1}{2}$ lorsque $p = \frac{1}{2}$, $P(Z_2 = \varepsilon_2) = \frac{1}{2}$. Le produit vaut $\frac{1}{4}$: il y a indépendance.

Conclusion

Z_1 et Z_2 sont indépendantes si et seulement si $p = \frac{1}{2}$.

Loi de Z_n lorsque $p = \frac{1}{2}$. Alors $1 - 2p = 0$, donc $p_n = \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 1$, et

$P(Z_n = -1) = a_n = p_n = \frac{1}{2} = P(Z_n = 1)$. Conclusion : Z_n suit la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.

Loi conjointe de $(Z_1, \dots, Z_n)$. Soient $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ et posons $\varepsilon_0 = 1$. Montrons que

$$\{Z_1 = \varepsilon_1, \dots, Z_n = \varepsilon_n\} = \bigcap_{i=1}^n \{X_i = \varepsilon_{i-1} \varepsilon_i\}.$$

Si $Z_i = \varepsilon_i$ pour tout i , alors $X_1 = Z_1 = \varepsilon_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_1$ et, pour $i \geq 2$,
 $X_i = Z_i / Z_{i-1} = \varepsilon_i / \varepsilon_{i-1} = \varepsilon_{i-1} \varepsilon_i$ (car $\varepsilon_{i-1}^2 = 1$). Réciproquement, si $X_i = \varepsilon_{i-1} \varepsilon_i$ pour tout i , alors

$$Z_i = \prod_{j=1}^i \varepsilon_{j-1} \varepsilon_j = \varepsilon_0 \varepsilon_i \prod_{j=1}^{i-1} \varepsilon_j^2 = \varepsilon_i$$

(produit télescopique). Par indépendance mutuelle des X_i , et puisque chaque X_i prend chacune des valeurs ± 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$:

$$P(Z_1 = \varepsilon_1, \dots, Z_n = \varepsilon_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i = \varepsilon_{i-1} \varepsilon_i) = \frac{1}{2^n}.$$

Conséquence. Pour tous $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$:

$$P(Z_1 = \varepsilon_1, \dots, Z_n = \varepsilon_n) = \frac{1}{2^n} = \prod_{i=1}^n P(Z_i = \varepsilon_i).$$

Par la caractérisation de l'indépendance mutuelle de variables discrètes, $Z_1, \dots, Z_n$ sont mutuellement indépendantes, et ceci pour tout n . Toute sous-famille finie de (Z_n) étant contenue dans une famille $(Z_1, \dots, Z_n)$, elle est aussi formée de variables mutuellement indépendantes.

Conclusion

lorsque $p = \frac{1}{2}$, $(Z_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi uniforme sur $\{-1, 1\}$ (bien que chaque Z_n dépende de toutes les variables $X_1, \dots, X_n$). Lorsque $p \neq \frac{1}{2}$, au contraire, Z_1 et Z_2 ne sont même pas indépendantes.

EXERCICE 2

1. On écrit F à l'aide d'une primitive de f .

Pour tout réel x , f est continue sur le segment $[x, x + 1]$, donc $F(x)$ est bien défini.

Posons $\Phi(x) = \int_0^x f(t) dt$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème fondamental du calcul intégral assure que Φ est la primitive de f qui s'annule en 0 : Φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\Phi' = f$. Par la relation de Chasles :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \Phi(x + 1) - \Phi(x).$$

Comme $x \mapsto x + 1$ est dérivable, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ (donc continue) par composition et différence, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \Phi'(x + 1) - \Phi'(x) = f(x + 1) - f(x).$$

Conclusion

F est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $F'(x) = f(x + 1) - f(x)$. En particulier F' est continue : F est même de classe C^1 .

2.(a) On calcule F pour $f(x) = \sin(2\pi x)$.

Méthode 1 — Calcul direct par primitive.

Une primitive de $t \mapsto \sin(2\pi t)$ est $t \mapsto -\frac{\cos(2\pi t)}{2\pi}$. Donc :

$$F(x) = \left[-\frac{\cos(2\pi t)}{2\pi} \right]_x^{x+1} = \frac{\cos(2\pi x) - \cos(2\pi x + 2\pi)}{2\pi} = 0,$$

car $\cos$ est 2π -périodique.

Méthode 2 — Par la dérivée.

D'après la question 1, $F'(x) = \sin(2\pi x + 2\pi) - \sin(2\pi x) = 0$ pour tout x (périodicité de $\sin$). La fonction F est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$, égale à

$$F(0) = \int_0^1 \sin(2\pi t) dt = \left[-\frac{\cos(2\pi t)}{2\pi} \right]_0^1 = 0.$$

La méthode 2 met en évidence le mécanisme général : si f est 1-périodique, F est constante, égale à l'intégrale de f sur une période. Ce point sera utile en 3.(b) et 4.(a).

Conclusion

pour $f(x) = \sin(2\pi x)$, F est la fonction nulle.

2.(b) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$: elle l'est sur $] -\infty, 1[$ et sur $] 1, +\infty[$, et $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x) = 0 = \sqrt{1 - 1} = f(1)$, la restriction à $[1, +\infty[$ étant continue en 1. On distingue selon la position de 1 par rapport à $[x, x + 1]$.

Cas $x \leq 0$. Alors $x + 1 \leq 1$, et $f(t) = 1 - t$ sur $[x, x + 1]$ (la valeur en $t = 1$ éventuelle ne modifie pas l'intégrale, et de toute façon $1 - 1 = 0 = \sqrt{0}$). Donc :

$$F(x) = \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_x^{x+1} = 1 - \frac{(x+1)^2 - x^2}{2} = 1 - \frac{2x+1}{2} = \frac{1}{2} - x.$$

Cas $0 < x < 1$. Alors $x < 1 < x + 1$ et, par Chasles :

$$F(x) = \int_x^1 (1 - t) dt + \int_1^{x+1} \sqrt{t - 1} dt = \left[-\frac{(1 - t)^2}{2} \right]_x^1 + \left[\frac{2}{3} (t - 1)^{3/2} \right]_1^{x+1} = \frac{(1 - x)^2}{2} + \frac{2}{3} x^{3/2}.$$

Cas $x \geq 1$. Alors $f(t) = \sqrt{t - 1}$ sur $[x, x + 1]$ et :

$$F(x) = \left[\frac{2}{3}(t-1)^{3/2} \right]_x^{x+1} = \frac{2}{3} (x^{3/2} - (x-1)^{3/2}).$$

Contrôle de cohérence : en $x = 0$ les deux premières formules donnent $\frac{1}{2}$; en $x = 1$ les deux dernières donnent $\frac{2}{3}$, conformément à la continuité de F .

Conclusion

$$F(x) = \frac{1}{2} - x \text{ si } x \leq 0, \quad F(x) = \frac{(1-x)^2}{2} + \frac{2}{3}x^{3/2} \text{ si } 0 < x < 1,$$

$$F(x) = \frac{2}{3} (x^{3/2} - (x-1)^{3/2}) \text{ si } x \geq 1.$$

3.(a) D'après la question 1, pour $f \in E$, $T(f) = F$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc T est bien une application de E dans E . Soient $f, g \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Par linéarité de l'intégrale sur un segment, pour tout réel x :

$$T(\alpha f + \beta g)(x) = \int_x^{x+1} (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int_x^{x+1} f(t) dt + \beta \int_x^{x+1} g(t) dt$$

$$= (\alpha T(f) + \beta T(g))(x).$$

Conclusion

T est linéaire (c'est un endomorphisme de E).

3.(b) Injectivité. La fonction $f_0 : x \mapsto \sin(2\pi x)$ appartient à E et n'est pas nulle ($f_0(\frac{1}{4}) = 1$). D'après 2.(a), $T(f_0) = 0$. Le noyau de T n'est donc pas réduit à la fonction nulle.

Conclusion

T n'est pas injective.

Surjectivité. D'après la question 1, toute fonction de l'image de T est dérivable sur $\mathbb{R}$. Or la fonction $v : x \mapsto |x|$ appartient à E (elle est continue) mais n'est pas dérivable en 0 : son taux d'accroissement $\frac{|x| - |0|}{x}$ vaut 1 pour $x > 0$ et -1 pour $x < 0$, donc n'a pas de limite en 0. Ainsi v n'a pas d'antécédent par T .

Conclusion

T n'est pas surjective.

4.(a) Il faut une fonction non nulle $f \in E$ telle que $T(f) = 0 \cdot f = 0$. La fonction $f_0 : x \mapsto \sin(2\pi x)$ convient : elle est non nulle et $T(f_0) = 0$ d'après 2.(a).

Conclusion

0 est valeur propre de T , et f_0 est une fonction propre associée.

4.(b) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $e_a : x \mapsto e^{ax}$, fonction continue et non nulle. Pour tout réel x , le changement de variable affine $t = x + s$ donne :

$$T(e_a)(x) = \int_x^{x+1} e^{at} dt = \int_0^1 e^{a(x+s)} ds = e^{ax} \int_0^1 e^{as} ds.$$

Posons $\lambda(a) = \int_0^1 e^{as} ds$. Si $a \neq 0$, $\lambda(a) = \left[\frac{e^{as}}{a} \right]_0^1 = \frac{e^a - 1}{a}$; si $a = 0$,

$$\lambda(0) = \int_0^1 1 ds = 1.$$

Conclusion

$T(e_a) = \lambda(a)e_a$ avec $e_a \neq 0$, donc e_a est fonction propre associée à la valeur propre

$$\lambda(a) = \frac{e^a - 1}{a} \text{ si } a \neq 0, \quad \lambda(0) = 1.$$

4.(c) Continuité. Sur $\mathbb{R}^*$, λ est continue comme quotient de fonctions continues. En 0 :

$$\frac{e^a - 1}{a} = \frac{e^a - e^0}{a - 0} \rightarrow \exp'(0) = 1 = \lambda(0). \text{ Donc } \lambda \text{ est continue sur } \mathbb{R}.$$

Stricte croissance.

Méthode 1 — Étude de la dérivée.

Sur $\mathbb{R}^*$, λ est dérivable et $\lambda'(a) = \frac{ae^a - (e^a - 1)}{a^2} = \frac{\varphi(a)}{a^2}$ avec $\varphi(a) = (a - 1)e^a + 1$. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'(a) = e^a + (a - 1)e^a = ae^a$, du signe de a : φ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, de minimum $\varphi(0) = 0$. Donc $\varphi(a) > 0$ pour $a \neq 0$, et $\lambda'(a) > 0$ sur $\mathbb{R}^*$. La fonction λ est continue sur l'intervalle $]-\infty, 0]$ et dérivable de dérivée strictement positive sur son intérieur : elle y est strictement croissante (caractérisation de la monotonie, via l'égalité des accroissements finis). De même sur $[0, +\infty[$. Les deux intervalles ayant le point 0 en commun, λ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$: si $a < 0 < b$, alors $\lambda(a) < \lambda(0) < \lambda(b)$.

Méthode 2 — Représentation intégrale.

Pour tout réel a , $\lambda(a) = \int_0^1 e^{as} ds$ (y compris pour $a = 0$). Soient $a < b$. La fonction $s \mapsto e^{bs} - e^{as}$ est continue et positive sur $[0, 1]$, et strictement positive sur $]0, 1]$ puisque $bs > as$ et que $\exp$ est strictement croissante. Une fonction continue, positive et non identiquement nulle sur un segment a une intégrale strictement positive, donc

$$\lambda(b) - \lambda(a) = \int_0^1 (e^{bs} - e^{as}) ds > 0.$$

La méthode 1 est l'étude de fonction classique ; la méthode 2, plus courte, exploite la

forme intégrale obtenue en 4.(b) et la croissance de l'intégrale : elle évite tout traitement particulier du point 0 pour la monotonie.

Limites. En $-\infty$: $e^a - 1 \rightarrow -1$ et $a \rightarrow -\infty$, donc $\lambda(a) \rightarrow 0$. En $+\infty$: $\frac{e^a}{a} \rightarrow +\infty$ par croissances comparées et $\frac{1}{a} \rightarrow 0$, donc $\lambda(a) = \frac{e^a}{a} - \frac{1}{a} \rightarrow +\infty$.

Tableau de variations : λ croît strictement de 0 (limite en $-\infty$, non atteinte) à $+\infty$, avec $\lambda(0) = 1$.

Conséquence. La fonction λ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$; par le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left] \lim_{-\infty} \lambda, \lim_{+\infty} \lambda \right[=]0, +\infty[$. Pour tout $\mu > 0$, il existe donc $a \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda(a) = \mu$, et μ est valeur propre de T (fonction propre e_a). Enfin 0 est valeur propre d'après 4.(a).

Conclusion

tout réel positif ou nul est valeur propre de T .

PROBLÈME

A

1.(a) Soit f ayant la propriété $\mathcal{P}$, définie sur D .

Supposons $0 \in D$. Alors $1 = 0 + 1 \in D$ et $f(1) = 0 \cdot f(0) = 0$, ce qui contredit $f(1) = 1$.
Donc $0 \notin D$.

Supposons qu'un entier $-m$, avec $m \in \mathbb{N}^*$, appartienne à D . La propriété $\mathcal{P}$ donne :
 $x \in D \Rightarrow x + 1 \in D$; par récurrence finie, $-m + k \in D$ pour $k = 0, 1, \dots, m$, en particulier $0 \in D$, ce qui est impossible.

Conclusion

D ne contient aucun entier négatif ou nul ; une fonction ayant la propriété $\mathcal{P}$ ne peut pas être définie en un tel point.

1.(b) Ici $D = \mathbb{N}^*$ et $f(n) = (n - 1)!$.

Le réel 1 appartient à $\mathbb{N}^*$ et $f(1) = 0! = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n + 1 \in \mathbb{N}^*$ et $f(n + 1) = n! = n \cdot (n - 1)! = n f(n)$.

Conclusion

f a la propriété $\mathcal{P}$.

2.(a) Résultats du cours utilisés (fonction gamma) : pour tout $x > 0$, l'intégrale

$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ converge, $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$; de plus $\Gamma(n + 1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Vérification de $\mathcal{P}$ avec $D = \mathbb{R}_+^*$: $1 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\Gamma(1) = 1$; pour tout $x > 0$, $x + 1 > 0$ donc $x + 1 \in D$, et $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.

Conclusion

Γ a la propriété $\mathcal{P}$ et, pour tout entier $n \geq 1$, $\Gamma(n) = (n - 1)!$.

2.(b) Soit $x > 0$. On montre par récurrence sur $n \geq 1$ la propriété $\mathcal{R}_n$:

$$\Gamma(x + n) = (x + n - 1)(x + n - 2) \cdots (x + 1)x \Gamma(x).$$

Initialisation : pour $n = 1$, la relation s'écrit $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$, vraie d'après 2.(a).

Hérédité : si $\mathcal{R}_n$ est vraie, comme $x + n > 0$, la propriété $\mathcal{P}$ donne

$$\Gamma(x + n + 1) = (x + n)\Gamma(x + n) = (x + n)(x + n - 1) \cdots (x + 1)x \Gamma(x),$$

soit $\mathcal{R}_{n+1}$.

Conclusion

pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(x + n) = (x + n - 1) \cdots (x + 1)x \Gamma(x)$.

3. Remarque préliminaire. Pour $x \in E$, aucun des facteurs $x, x + 1, \dots, x + n - 1$ n'est nul (sinon x serait un entier négatif ou nul), donc $A_n(x)$ est bien défini dès que $x + n > 0$ (ce qui donne un sens à $\Gamma(x + n)$).

3.(a) Soient $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Le produit $x(x+1)\cdots(x+n-1)$ est strictement positif et, d'après 2.(b), il vaut $\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}$; on rappelle que $\Gamma(x) > 0$ comme intégrale d'une fonction continue strictement positive sur $]0, +\infty[$. Donc :

$$A_n(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} = \Gamma(x).$$

Conclusion

pour $x > 0$ et $n > 0$, $A_n(x) = \Gamma(x)$ ne dépend pas de n . Avec la convention de l'énoncé, on a aussi $A_0(x) = \Gamma(x)$.

3.(b) Soit $x < 0$ non entier.

Rang N_x . Posons $N_x = \lfloor -x \rfloor + 1$. Comme $-x$ n'est pas entier, $\lfloor -x \rfloor < -x < \lfloor -x \rfloor + 1$. Pour tout entier $n \geq N_x$, $n > -x$, c'est-à-dire $x+n > 0$; et pour $n \leq N_x - 1 = \lfloor -x \rfloor$, $x+n \leq x + \lfloor -x \rfloor < 0$. Ainsi $x+n > 0$ exactement à partir du rang $N_x \geq 1$.

Calcul de $A_{n+p}(x)$. Soient $n > N_x$ et $p \in \mathbb{N}$. On a $x+n > 0$ et $(x+n)+p > 0$, donc $A_{n+p}(x)$ et $A_p(x+n)$ sont définis. En séparant les n premiers facteurs du dénominateur :

$$A_{n+p}(x) = \frac{\Gamma(x+n+p)}{\prod_{k=0}^{n-1} (x+k) \cdot \prod_{j=0}^{p-1} (x+n+j)} = \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \cdot \frac{\Gamma((x+n)+p)}{(x+n)(x+n+1)\cdots(x+n+p-1)},$$

soit :

$$A_{n+p}(x) = \frac{A_p(x+n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}.$$

(Pour $p = 0$, les deux produits relatifs à p sont vides et la formule reste vraie avec $A_0(x+n) = \Gamma(x+n)$.)

Conséquence. Comme $x + n > 0$, la question 3.(a) et la convention $A_0 = \Gamma$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donnent $A_p(x + n) = \Gamma(x + n)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Donc :

$$A_{n+p}(x) = \frac{\Gamma(x + n)}{x(x + 1) \cdots (x + n - 1)} = A_n(x).$$

Conclusion

$\forall n > N_x, \forall p \in \mathbb{N}, A_{n+p}(x) = A_n(x)$: la suite $(A_n(x))_{n > N_x}$ est constante. Le calcul montre d'ailleurs que cela reste vrai pour $n \geq N_x$, et que N_x est le plus petit entier n tel que $x + n > 0$; avec $N_x = 0$ pour $x > 0$, cette description vaut pour tout $x \in E$.

3.(c) Propriété $\mathcal{P}$ pour $\tilde{\Gamma}$ (avec $D = E$).

Valeur en 1 : $1 \in E, N_1 = 0$, donc $\tilde{\Gamma}(1) = A_1(1) = \Gamma(1) = 1$ d'après 3.(a).

Stabilité : si $x \in E$, alors $x + 1 \in E$; en effet, si $x + 1$ était un entier négatif ou nul, $x = (x + 1) - 1$ en serait un aussi.

Relation fonctionnelle : soit $x \in E$. Choisissons un entier $m \geq 1$ tel que $m > N_x$ et $m > N_{x+1}$. Alors $m + 1 > N_x$, donc $\tilde{\Gamma}(x) = A_{m+1}(x)$, et $\tilde{\Gamma}(x + 1) = A_m(x + 1)$. Or, comme $x \neq 0$:

$$A_{m+1}(x) = \frac{\Gamma(x + m + 1)}{x(x + 1) \cdots (x + m)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\Gamma((x + 1) + m)}{(x + 1)(x + 2) \cdots (x + 1 + m - 1)} = \frac{A_m(x + 1)}{x}.$$

Donc $x\tilde{\Gamma}(x) = \tilde{\Gamma}(x + 1)$.

Conclusion

$\tilde{\Gamma}$ a la propriété $\mathcal{P}$ sur E .

Prolongement : pour $x > 0, N_x = 0$ et $\tilde{\Gamma}(x) = A_1(x) = \Gamma(x)$ d'après 3.(a).

Formule demandée : soit $x \in E$. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que

$\tilde{\Gamma}(x + n) = (x + n - 1) \cdots (x + 1)x \tilde{\Gamma}(x)$. Pour $n = 1$, c'est la propriété $\mathcal{P}$. Si la relation est

vraie au rang n , comme $x + n \in E$ (stabilité), $\mathcal{P}$ donne

$$\tilde{\Gamma}(x + n + 1) = (x + n)\tilde{\Gamma}(x + n) = (x + n)(x + n - 1) \cdots x \tilde{\Gamma}(x).$$

Conclusion

$$\forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N}^*, \tilde{\Gamma}(x + n) = (x + n - 1)(x + n - 2) \cdots (x + 1)x \tilde{\Gamma}(x).$$

Remarque utile pour la suite : Γ (prolongée) ne s'annule pas sur E . En effet, pour $x \in E$ et $n > N_x$, $\Gamma(x + n) > 0$ et $\Gamma(x + n) = (x + n - 1) \cdots x \Gamma(x)$, donc $\Gamma(x) \neq 0$.

4.(a) Méthode 1 — Comparaison à des intégrales de Riemann.

Intégrale I . La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0, 1]$ et négative ; seul le voisinage de 0 pose problème. On a $t^{3/4} \cdot \frac{|\ln t|}{\sqrt{t}} = -t^{1/4} \ln t \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0^+$ (croissances comparées), donc $\frac{|\ln t|}{\sqrt{t}} = o\left(\frac{1}{t^{3/4}}\right)$ en 0. Les fonctions sont positives et $\int_0^1 \frac{dt}{t^{3/4}}$ converge (intégrale de Riemann d'exposant $\frac{3}{4} < 1$) ; par comparaison, $\int_0^1 \frac{|\ln t|}{\sqrt{t}} dt$ converge.

Méthode 2 — Calcul explicite de I .

Pour $\varepsilon \in]0, 1[$, on intègre par parties sur le segment $[\varepsilon, 1]$ avec $u(t) = \ln t$, $v(t) = 2\sqrt{t}$, fonctions de classe C^1 sur ce segment :

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt = \left[2\sqrt{t} \ln t \right]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 \frac{2\sqrt{t}}{t} dt = -2\sqrt{\varepsilon} \ln \varepsilon - \left[4\sqrt{t} \right]_{\varepsilon}^1 = -2\sqrt{\varepsilon} \ln \varepsilon - 4 + 4\sqrt{\varepsilon}.$$

Quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$, $\sqrt{\varepsilon} \ln \varepsilon \rightarrow 0$ (croissances comparées) et $\sqrt{\varepsilon} \rightarrow 0$, donc l'intégrale converge et $I = -4$. La fonction intégrée étant de signe constant (négative), la

convergence équivaut à la convergence absolue, et $\int_0^1 \frac{|\ln t|}{\sqrt{t}} dt = -I = 4$.

La méthode 1 suffit pour la convergence; la méthode 2 fournit en plus la valeur $I = -4$, qui donnera une constante K explicite en 4.(c).

Intégrale J . La fonction $t \mapsto t \ln t e^{-t}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$. On a $t^2 \cdot t \ln t e^{-t} = t^3 \ln t e^{-t} \rightarrow 0$ en $+\infty$ (croissances comparées : $t^3 \ln t \leq t^4$ pour $t \geq 1$ et $t^4 e^{-t} \rightarrow 0$). Donc $t \ln t e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$; comme $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge (Riemann, exposant $2 > 1$) et que les fonctions sont positives, J converge, absolument puisque l'intégrande est positif.

Conclusion

I et J sont absolument convergentes, et $I = -4$.

4.(b) Soit $t > 0$ fixé. La fonction $u_t : x \mapsto t^{x-1} = e^{(x-1)\ln t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $u'_t(y) = \ln t e^{(y-1)\ln t} = \ln t \cdot t^{y-1}$. Pour $x \in \left] \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right]$, le segment d'extrémités x et 1 est inclus dans l'intervalle $\left] \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right]$; il suffit donc de majorer $|u'_t|$ sur cet intervalle, puis d'appliquer l'inégalité des accroissements finis : si $|u'_t(y)| \leq M$ pour tout y entre 1 et x , alors $|u_t(x) - u_t(1)| \leq M|x - 1|$.

Cas $t \in]0, 1[$. Alors $\ln t < 0$. Pour $y \in \left] \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right]$, $y - 1 > -\frac{1}{2}$, donc

$(y - 1) \ln t < -\frac{1}{2} \ln t$ et, par croissance de $\exp$, $t^{y-1} < t^{-1/2}$. Ainsi

$|u'_t(y)| = |\ln t| t^{y-1} \leq \frac{|\ln t|}{\sqrt{t}}$, et l'inégalité des accroissements finis donne :

$$|h(t, x) - h(t, 1)| \leq |x - 1| \frac{|\ln t|}{\sqrt{t}}. \quad (1)$$

Cas $t \geq 1$. Alors $\ln t \geq 0$. Pour $y \in \left] \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right]$, $y - 1 < \frac{1}{2}$, donc $t^{y-1} \leq t^{1/2} \leq t$ (car $t \geq 1$). Ainsi $|u'_t(y)| = \ln t \cdot t^{y-1} \leq t \ln t$, d'où :

$$|h(t, x) - h(t, 1)| \leq |x - 1| t \ln t. \quad (2)$$

Conclusion

les inégalités (1) et (2) sont établies.

4.(c) Soit $x \in \left] \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right[$. Comme $x > 0$ et $1 > 0$, $\Gamma(x)$ et $\Gamma(1)$ sont des intégrales convergentes, et par linéarité :

$$\begin{aligned} \Gamma(x) - \Gamma(1) &= \int_0^{+\infty} (h(t, x) - h(t, 1)) e^{-t} dt = \int_0^1 (h(t, x) - h(t, 1)) e^{-t} dt \\ &+ \int_1^{+\infty} (h(t, x) - h(t, 1)) e^{-t} dt. \end{aligned}$$

Sur $]0, 1[$, d'après (1) et puisque $0 < e^{-t} \leq 1$: $|h(t, x) - h(t, 1)| e^{-t} \leq |x - 1| \frac{|\ln t|}{\sqrt{t}}$.

Sur $[1, +\infty[$, d'après (2) : $|h(t, x) - h(t, 1)| e^{-t} \leq |x - 1| t \ln t e^{-t}$.

Les majorants sont intégrables sur les intervalles correspondants (question 4.(a)) ; par comparaison de fonctions positives, les deux intégrales ci-dessus sont absolument convergentes et, l'inégalité $\left| \int \varphi \right| \leq \int |\varphi|$ étant vraie sur tout segment puis par passage à la limite :

$$|\Gamma(x) - \Gamma(1)| \leq |x - 1| \int_0^1 \frac{|\ln t|}{\sqrt{t}} dt + |x - 1| \int_1^{+\infty} t \ln t e^{-t} dt = (-I + J) |x - 1|.$$

Avec $K = J - I = J + 4$, constante indépendante de x :

$$\forall x \in \left] \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right[, \quad |\Gamma(x) - \Gamma(1)| \leq K |x - 1|. \quad (3)$$

Continuité en 1. Pour $x \in \left] \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right[$, $0 \leq |\Gamma(x) - \Gamma(1)| \leq K |x - 1|$ et $K |x - 1| \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 1$. Par encadrement, $\Gamma(x) \rightarrow \Gamma(1)$.

Conclusion

(3) est vraie avec $K = J + 4$, et Γ est continue au point 1.

5. Équivalent en 0. L'ensemble $] -1, 0[\cup] 0, 1[$ est inclus dans E . Pour x dans cet ensemble, la propriété $\mathcal{P}$ donne $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, donc :

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1).$$

Quand $x \rightarrow 0$, $x+1 \rightarrow 1$ et Γ est continue en 1 (question 4.(c)), donc par composition des limites $\Gamma(x+1) \rightarrow \Gamma(1) = 1$. Ainsi $x\Gamma(x) \rightarrow 1$, c'est-à-dire $\frac{\Gamma(x)}{1/x} \rightarrow 1$.

Conclusion

$$\Gamma(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x} \text{ (à gauche comme à droite de 0).}$$

Équivalent en $-n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in E$ proche de $-n$, plus précisément $x \in]-n-1, -n+1[\setminus \{-n\}$ (inclus dans E), la question 3.(c) donne :

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1) \cdots (x+1)x\Gamma(x), \quad \text{donc} \quad \Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{\prod_{k=0}^{n-1} (x+k)}$$

(le produit est non nul car $x \in E$). Quand $x \rightarrow -n$, on a $y = x+n \rightarrow 0$ avec $y \neq 0$, et d'après ce qui précède $\Gamma(x+n) \sim \frac{1}{x+n}$. Par ailleurs, par continuité des polynômes :

$$\prod_{k=0}^{n-1} (x+k) \xrightarrow{x \rightarrow -n} \prod_{k=0}^{n-1} (k-n) = \prod_{j=1}^n (-j) = (-1)^n n! \neq 0,$$

donc

$$\prod_{k=0}^{n-1} (x+k) \sim (-1)^n n!.$$

Le quotient d'équivalents étant licite :

Conclusion

$$\Gamma(x) \underset{x \rightarrow -n}{\sim} \frac{(-1)^n}{n! (x+n)}.$$

6. Résultat admis par l'énoncé : $\Gamma(x) \sim x^{x-1} e^{-x} \sqrt{2\pi x}$ quand $x \rightarrow +\infty$. On note

$\phi(y) = y^{y-1} e^{-y} \sqrt{2\pi y}$ pour $y > 0$; $\phi(y) > 0$ et $\frac{\Gamma(y)}{\phi(y)} \rightarrow 1$ quand $y \rightarrow +\infty$. La formule de Stirling n'est pas utilisée comme résultat connu : elle est déduite de (*) en 6.(b).

6.(a) Soit x réel fixé. Si $x = 0$, la suite est constante égale à $1 = e^0$. Si $x \neq 0$, pour $n > |x|$ on a $1 + \frac{x}{n} > 0$ et :

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right) = \exp\left(x \cdot \frac{\ln(1 + \frac{x}{n})}{\frac{x}{n}}\right).$$

Comme $\frac{x}{n} \rightarrow 0$ avec $\frac{x}{n} \neq 0$, et que $\frac{\ln(1+u)}{u} \rightarrow 1$ quand $u \rightarrow 0$ (développement limité $\ln(1+u) = u + o(u)$), on obtient $n \ln(1 + \frac{x}{n}) \rightarrow x$, puis par continuité de $\exp$:

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

6.(b) La suite (n) tend vers $+\infty$ et $\frac{\Gamma(y)}{\phi(y)} \rightarrow 1$ quand $y \rightarrow +\infty$; par passage à la limite

dans l'image d'une suite, $\frac{\Gamma(n)}{\phi(n)} \rightarrow 1$. Or $\Gamma(n) = (n-1)!$, donc $n! = n \Gamma(n)$ et :

$$\frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = \frac{n \Gamma(n)}{n \cdot n^{n-1} e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = \frac{\Gamma(n)}{\phi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Conclusion

$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$, ce qui est la formule de Stirling.

6.(c) Soit $x \in E$ fixé. Pour $n > N_x$ et $n \geq 1$, on a $x + n > 0$, $n > 0$ et

$1 + \frac{x}{n} = \frac{x+n}{n} > 0$. On écrit :

$$\frac{\Gamma(x+n)}{n^x \Gamma(n)} = \frac{\Gamma(x+n)}{\phi(x+n)} \cdot \frac{\phi(n)}{\Gamma(n)} \cdot \frac{\phi(x+n)}{n^x \phi(n)}.$$

Premier facteur : $x+n \rightarrow +\infty$, donc $\frac{\Gamma(x+n)}{\phi(x+n)} \rightarrow 1$ (image d'une suite tendant vers

$+\infty$). Deuxième facteur : $\frac{\phi(n)}{\Gamma(n)} \rightarrow 1$ de même.

Troisième facteur : comme $n^x \cdot n^{n-1} = n^{x+n-1}$:

$$\frac{\phi(x+n)}{n^x \phi(n)} = \frac{(x+n)^{x+n-1}}{n^{x+n-1}} \cdot \frac{e^{-x-n}}{e^{-n}} \cdot \sqrt{\frac{x+n}{n}} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{x-1} e^{-x} \sqrt{1 + \frac{x}{n}}.$$

D'après 6.(a), $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \rightarrow e^x$. Ensuite

$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{x-1} = \exp\left((x-1) \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right) \rightarrow e^0 = 1$ par continuité de $\ln$ en 1 et de $\exp$ en

0, et $\sqrt{1 + \frac{x}{n}} \rightarrow 1$. Le troisième facteur tend donc vers $e^x \cdot 1 \cdot e^{-x} \cdot 1 = 1$.

Conclusion

par produit de limites, $\forall x \in E, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(x+n)}{n^x \Gamma(n)} = 1$.

6.(d) Soit $x \in E$ et $n > N_x$. D'après 3.(c) appliquée avec $n+1$:

$$\Gamma(x+n+1) = (x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)x\Gamma(x).$$

Comme $x+n+1 > 0$, $\Gamma(x+n+1) > 0$; le produit $x(x+1)\cdots(x+n)$ est non nul car $x \in E$. Donc :

$$\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \frac{n!n^x\Gamma(x)}{\Gamma(x+n+1)}.$$

Or $n! = n\Gamma(n)$ et, par $\mathcal{P}$, $\Gamma(x+n+1) = (x+n)\Gamma(x+n)$ avec $\Gamma(x+n) > 0$. Ainsi :

$$\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \Gamma(x) \cdot \frac{n}{x+n} \cdot \frac{n^x\Gamma(n)}{\Gamma(x+n)}.$$

On a $\frac{n}{x+n} = \frac{1}{1+x/n} \rightarrow 1$ et, d'après 6.(c), $\frac{n^x\Gamma(n)}{\Gamma(x+n)} \rightarrow 1$ (inverse d'une suite tendant vers 1).

Conclusion

$$\forall x \in E, \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

B

Notation. On note $\psi(u) = u - \ln(1+u)$ pour $u > -1$. La fonction ψ est dérivable et $\psi'(u) = 1 - \frac{1}{1+u} = \frac{u}{1+u}$, du signe de u : ψ décroît sur $] -1, 0]$, croît sur $[0, +\infty[$ et $\psi(0) = 0$. Donc $\psi \geq 0$ sur $] -1, +\infty[$. Lorsque $1 + \frac{x}{n} > 0$, on a $g_n(x) > 0$ et $u_n(x) = \ln g_n(x) = \frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \psi\left(\frac{x}{n}\right)$.

1. Soit $x \geq 0$. Pour tout $n \geq 1$, $1 + \frac{x}{n} \geq 1 > 0$, donc $g_n(x) > 0$ et $u_n(x) = \psi\left(\frac{x}{n}\right) \geq 0$. Si $x = 0$, $u_n(0) = 0$ et la série converge trivialement. On suppose désormais $x > 0$.

Méthode 1 — Équivalent.

Le développement limité usuel $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ en 0 donne

$\psi(u) = \frac{u^2}{2} + o(u^2)$, donc $\psi(u) \sim \frac{u^2}{2}$ quand $u \rightarrow 0$. Comme $\frac{x}{n} \rightarrow 0$ avec $\frac{x}{n} \neq 0$:

$u_n(x) \sim \frac{x^2}{2n^2}$. La série de Riemann

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

converge ; les termes étant positifs, la série

$$\sum u_n(x)$$

converge par équivalence.

Méthode 2 — Majoration explicite.

Posons $\chi(u) = \frac{u^2}{2} - \psi(u) = \frac{u^2}{2} - u + \ln(1+u)$ pour $u \geq 0$. On a

$\chi'(u) = u - 1 + \frac{1}{1+u} = \frac{u^2}{1+u} \geq 0$ et $\chi(0) = 0$, donc $\chi \geq 0$ sur $[0, +\infty[$. Ainsi

$0 \leq u_n(x) \leq \frac{x^2}{2n^2}$ pour tout $n \geq 1$, et la série converge par comparaison de séries à termes positifs.

La méthode 1 est la plus rapide (équivalent puis Riemann) ; la méthode 2 fournit une majoration valable pour tout n , utile pour estimer le reste, mais elle ne s'étend pas aux $x < 0$ (on a alors $\psi(u) \geq \frac{u^2}{2}$), d'où le recours à la méthode 1 en question 2.

Limite de $G_n(x)$. Les $g_k(x)$ étant strictement positifs,

$$\ln G_n(x) = \sum_{k=1}^n \ln g_k(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x),$$

donc

$$G_n(x) = \exp \left(\sum_{k=1}^n u_k(x) \right).$$

La somme partielle converge vers

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$$

et $\exp$ est continue.

Conclusion

pour tout $x \geq 0$,

$$\sum u_n(x)$$

converge et

$$G(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = \exp \left(\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) \right)$$

existe (et $G(x) > 0$).

2. Soit $x < 0$ non entier et $N = N_x = \lfloor -x \rfloor + 1 \geq 1$ (question A.3.(b)). Pour tout $k \geq 1$, $1 + \frac{x}{k} = \frac{x+k}{k} \neq 0$ car $x \neq -k$: $g_k(x)$ est défini et non nul. Pour $k \geq N$, $x+k > 0$, donc $g_k(x) > 0$ (c'est la remarque de l'énoncé), et $u_k(x) = \psi\left(\frac{x}{k}\right)$ avec $\frac{x}{k} \in]-1, 0[$.

Convergence de

$$\sum_{k \geq N} u_k(x) :$$

$u_k(x) \geq 0$ et, comme en question 1 (méthode 1), $u_k(x) \sim \frac{x^2}{2k^2}$ puisque $\frac{x}{k} \rightarrow 0$ avec $\frac{x}{k} \neq 0$. Par équivalence avec une série de Riemann convergente à termes positifs, la série converge; notons

$$R(x) = \sum_{k=N}^{+\infty} u_k(x).$$

Pour $n \geq N$:

$$G_n(x) = G_{N-1}(x) \prod_{k=N}^n g_k(x) = G_{N-1}(x) \exp \left(\sum_{k=N}^n u_k(x) \right),$$

où

$$G_{N-1}(x) = \prod_{k=1}^{N-1} g_k(x)$$

est un réel non nul indépendant de n (produit vide égal à 1 si $N = 1$). Par continuité de $\exp$:

Conclusion

$(G_n(x))$ converge vers $G(x) = G_{N-1}(x) e^{R(x)}$, réel non nul. Avec la question 1, G est définie sur E .

3. Calcul de $\ln G_n(1)$. D'après la question 1 avec $x = 1$, $g_k(1) > 0$ et :

$$\ln G_n(1) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1),$$

la seconde somme étant télescopique ($\ln 1 = 0$).

Limite de v_n . Pour $n \geq 1$:

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n = \ln G_n(1) + \ln(n+1) - \ln n = \ln G_n(1) + \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

D'après la question 1,

$$\ln G_n(1) = \sum_{k=1}^n u_k(1) \rightarrow S(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(1),$$

réel fini, et $\ln(1 + \frac{1}{n}) \rightarrow \ln 1 = 0$. Donc (v_n) converge vers $\gamma = S(1)$.

Stricte positivité. Justifions d'abord : $\forall x > 0$, $e^x > x + 1$. La fonction $\theta(x) = e^x - x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\theta'(x) = e^x - 1 > 0$ pour $x > 0$; elle est donc strictement croissante sur $[0, +\infty[$, et $\theta(x) > \theta(0) = 0$ pour $x > 0$. Appliquée à $x = \frac{1}{k}$, et par stricte croissance de $\ln$, l'inégalité $e^{1/k} > 1 + \frac{1}{k}$ donne $\frac{1}{k} > \ln(1 + \frac{1}{k})$, c'est-à-dire $u_k(1) > 0$ pour tout $k \geq 1$. Les sommes partielles sont donc croissantes et, pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^n u_k(1) \geq u_1(1) = 1 - \ln 2.$$

Par passage à la limite dans l'inégalité large, $\gamma \geq 1 - \ln 2$. Enfin $\ln 2 < 1$ car $2 < e$, donc $1 - \ln 2 > 0$.

Conclusion

$$\ln G_n(1) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1),$$

et v_n converge vers

$$\gamma = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \right) \geq 1 - \ln 2 > 0.$$

4. Soit $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$G_n(x) = \frac{\prod_{k=1}^n e^{x/k}}{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k} \right)} = \frac{\exp \left(x \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)}{\prod_{k=1}^n \frac{x+k}{k}} = \frac{n! \exp \left(x \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)}{(x+1)(x+2) \cdots (x+n)}.$$

D'après A.3.(c) appliquée au rang $n+1$, puis la propriété $\mathcal{P}$ en $x+n \in E$:

$$x(x+1) \cdots (x+n) \Gamma(x) = \Gamma(x+n+1) = (x+n) \Gamma(x+n).$$

Comme $x \neq 0$ et $\Gamma(x) \neq 0$ (remarque finale de A.3.(c)), on obtient

$$(x+1) \cdots (x+n) = \frac{(x+n) \Gamma(x+n)}{x \Gamma(x)}, \text{ quantité non nulle. En reportant :}$$

Conclusion

$$\forall x \in E, G_n(x) = x \Gamma(x) \frac{n! \exp \left(x \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)}{(x+n) \Gamma(x+n)}.$$

5. Soit $x \in E$. Pour $n > N_x$, on a $\Gamma(x+n) > 0$. Avec $n! = n\Gamma(n)$ et

$$\exp\left(x \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) = n^x e^{xv_n}$$

(car

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = v_n + \ln n$$

et $e^{x \ln n} = n^x$), la question 4 s'écrit :

$$G_n(x) = x \Gamma(x) \cdot \frac{n}{x+n} \cdot \frac{n^x \Gamma(n)}{\Gamma(x+n)} \cdot e^{xv_n}.$$

Quand $n \rightarrow +\infty$: $\frac{n}{x+n} \rightarrow 1$; $\frac{n^x \Gamma(n)}{\Gamma(x+n)} \rightarrow 1$ d'après A.6.(c) ; $e^{xv_n} \rightarrow e^{x\gamma}$ d'après B.3 et la continuité de exp. Par ailleurs $G_n(x) \rightarrow G(x)$ (questions 1 et 2). Par unicité de la limite :

$$G(x) = x \Gamma(x) e^{\gamma x}.$$

Comme $x \neq 0$:

Conclusion

$$\forall x \in E, \Gamma(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x} G(x).$$

Relevé des adaptations

- Introduction du problème : « $n \mapsto (-1)!$ » rectifié en « $n \mapsto (n-1)!$ » (erreur typographique du PDF).
- A.1.(b) : « $(n-1)!!$ » rectifié en « $(n-1)!$ » (erreur typographique ; la double factorielle n'a pas de sens ici).
- A.2.(b), A.3 et A.3.(c) : « $(x+l)$ » rectifié en « $(x+1)$ » (erreur typographique).
- Exercice 2, A.2.(a), A.4.(a) : élément différentiel « t » rectifié en « dt » dans les intégrales (erreur typographique).
- Notations $\mathbb{N}^\times$ et $\mathbb{R}_+^\times$ remplacées par $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ (même sens).
- A.3 : précision « entier naturel n » et convention de produit vide ($A_0(x) = \Gamma(x)$), ajoutées dans l'énoncé du problème ; elles sont nécessaires pour donner un sens à $A_p(x+n)$ lorsque $p=0$ en A.3.(b).
- A.3.(c) : ajout de la convention $N_x = 0$ pour $x > 0$ et de la précision $n \in \mathbb{N}^*$ dans la formule à déduire, sans lesquelles la définition de $\tilde{\Gamma}$ sur les réels strictement positifs n'était pas explicite.
- A.6 : précision « $x \rightarrow +\infty$ » dans l'équivalence admise (*), implicite dans le PDF. La formule de Stirling n'est pas utilisée comme résultat connu : elle est déduite de (*), admise par l'énoncé.
- Aucune question ne fait intervenir de nombres complexes, le théorème de Slutsky, l'ancien critère d'extremum ou du code informatique ; aucune figure n'est présente dans le sujet.