



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

1997

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé — ECRICOME 1997, Mathématiques (option scientifique), version adaptée au programme ECG mathématiques approfondies

Exercice 1

Dans tout l'exercice, u est un vecteur non nul de E , donc $\langle u, u \rangle = \|u\|^2 > 0$ et φ_u est bien définie. Pour alléger, on pose pour tout $x \in E$:

$$a(x) = \frac{\langle x, u \rangle}{\langle u, u \rangle}, \text{ de sorte que } \varphi_u(x) = 2a(x)u - x.$$

L'application a est linéaire de E dans $\mathbb{R}$, car le produit scalaire est linéaire par rapport à sa première variable. On remarque aussi que $a(u) = 1$.

1. Il s'agit de vérifier la linéarité de φ_u , puis de calculer $\varphi_u \circ \varphi_u$.

Linéarité. φ_u va de E dans E . Soient $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Par linéarité de a :

$$\begin{aligned} \varphi_u(\alpha x + y) &= 2(\alpha a(x) + a(y))u - \alpha x - y = \alpha(2a(x)u - x) + (2a(y)u - y) = \alpha\varphi_u(x) \\ &\quad + \varphi_u(y) \end{aligned}$$

Donc φ_u est un endomorphisme de E .

Involutivité. Soit $x \in E$. Calculons d'abord $a(\varphi_u(x))$:

$$a(\varphi_u(x)) = \frac{\langle 2a(x)u - x, u \rangle}{\langle u, u \rangle} = \frac{2a(x)\langle u, u \rangle - \langle x, u \rangle}{\langle u, u \rangle} = 2a(x) - a(x) = a(x)$$

Par conséquent :

$$\varphi_u(\varphi_u(x)) = 2a(\varphi_u(x))u - \varphi_u(x) = 2a(x)u - (2a(x)u - x) = x$$

Conclusion

φ_u est un endomorphisme de E vérifiant $\varphi_u \circ \varphi_u = \text{id}_E$; il est involutif.

2. On calcule $\varphi_u(u)$. Comme $a(u) = 1$:

$$\varphi_u(u) = 2u - u = u$$

Comme $u \neq 0$ et $\varphi_u(u) = 1 \cdot u$, le vecteur u est un vecteur propre de φ_u associé à la valeur propre 1.

Conclusion

1 est valeur propre de φ_u et u est un vecteur propre associé.

3. On doit montrer l'égalité $\langle \varphi_u(x_1), \varphi_u(x_2) \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle$ pour tous $x_1, x_2 \in E$. Deux approches naturelles existent : un calcul direct par bilinéarité, ou une décomposition de chaque vecteur selon D_u et son orthogonal.

Méthode 1 — Calcul direct par bilinéarité.

Soient $x_1, x_2 \in E$; notons $a_1 = a(x_1)$ et $a_2 = a(x_2)$, de sorte que $\langle x_1, u \rangle = a_1 \|u\|^2$ et $\langle x_2, u \rangle = a_2 \|u\|^2$. Par bilinéarité et symétrie du produit scalaire :

$$\begin{aligned} \langle \varphi_u(x_1), \varphi_u(x_2) \rangle &= \langle 2a_1 u - x_1, 2a_2 u - x_2 \rangle = 4a_1 a_2 \|u\|^2 - 2a_1 \langle u, x_2 \rangle - 2a_2 \langle x_1, u \rangle \\ &\quad + \langle x_1, x_2 \rangle \end{aligned}$$

$$\langle \varphi_u(x_1), \varphi_u(x_2) \rangle = 4a_1 a_2 \|u\|^2 - 2a_1 a_2 \|u\|^2 - 2a_1 a_2 \|u\|^2 + \langle x_1, x_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle$$

Méthode 2 — Décomposition orthogonale.

Pour $x \in E$, posons $h = x - a(x)u$. Alors $\langle h, u \rangle = \langle x, u \rangle - a(x)\langle u, u \rangle = 0$, donc $h \in H_u$ (ensemble des vecteurs orthogonaux à u) et $x = a(x)u + h$. On obtient :

$$\varphi_u(x) = 2a(x)u - a(x)u - h = a(x)u - h$$

Ainsi φ_u conserve la composante selon u et change le signe de la composante orthogonale. Pour $x_1 = a_1u + h_1$ et $x_2 = a_2u + h_2$ (avec h_1, h_2 orthogonaux à u), les termes croisés $\langle u, h_2 \rangle$ et $\langle h_1, u \rangle$ sont nuls, donc :

$$\langle x_1, x_2 \rangle = a_1a_2\|u\|^2 + \langle h_1, h_2 \rangle \text{ et}$$

$$\langle \varphi_u(x_1), \varphi_u(x_2) \rangle = \langle a_1u - h_1, a_2u - h_2 \rangle = a_1a_2\|u\|^2 + \langle h_1, h_2 \rangle$$

Les deux quantités sont égales.

Comparaison : la méthode 1 est purement calculatoire et ne demande aucune idée ; la méthode 2 révèle la nature géométrique de φ_u (symétrie orthogonale par rapport à la droite D_u) et prépare directement les questions 4 et 5.

Conservation de la norme. En prenant $x_1 = x_2 = x$, on obtient $\|\varphi_u(x)\|^2 = \|x\|^2$. Les normes étant positives, $\|\varphi_u(x)\| = \|x\|$.

Conclusion

φ_u conserve le produit scalaire et la norme.

4. (a) Il faut montrer que $\text{Ker}(\varphi_u + \text{id}_E) = H_u$ et que ce sous-espace n'est pas réduit à $\{0\}$.

Soit $x \in E$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned}\varphi_u(x) = -x &\iff 2a(x)u - x = -x \iff 2a(x)u = 0 \iff a(x) = 0 \iff \langle x, u \rangle = 0 \\ &\iff x \in H_u\end{aligned}$$

où l'on a utilisé $u \neq 0$ pour la troisième équivalence. Ainsi $\text{Ker}(\varphi_u + \text{id}_E) = H_u$.

De plus, $H_u = D_u^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de D_u dans l'espace euclidien E , donc $\dim H_u = n - \dim D_u = n - 1 \geq 1$ puisque $n \geq 2$. Donc $H_u \neq \{0\}$ et -1 est bien valeur propre de φ_u .

Conclusion

-1 est valeur propre de φ_u et le sous-espace propre associé est H_u , de dimension $n - 1$.

(b) On cherche les sous-espaces propres et on compare la somme de leurs dimensions à n . Deux méthodes classiques se présentent.

Méthode 1 — Somme des dimensions des sous-espaces propres.

Déterminons $\text{Ker}(\varphi_u - \text{id}_E)$. Pour $x \in E$:

$$\varphi_u(x) = x \iff 2a(x)u = 2x \iff x = a(x)u$$

Si $\varphi_u(x) = x$, alors $x = a(x)u \in D_u$. Réciproquement, si $x = \alpha u$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, alors par linéarité et par la question 2, $\varphi_u(x) = \alpha \varphi_u(u) = \alpha u = x$. Donc $\text{Ker}(\varphi_u - \text{id}_E) = D_u$, de dimension 1.

Par la question 4(a), $\text{Ker}(\varphi_u + \text{id}_E) = H_u$ est de dimension $n - 1$. La somme des dimensions des sous-espaces propres associés à 1 et -1 vaut donc $1 + (n - 1) = n = \dim E$. D'après le critère du cours (un endomorphisme d'un espace de dimension n est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres vaut n), φ_u est diagonalisable.

Concrètement, si $(h_2, \dots, h_n)$ est une base de H_u , la famille $(u, h_2, \dots, h_n)$ est une base de E formée de vecteurs propres, dans laquelle la matrice de φ_u est $\text{diag}(1, -1, \dots, -1)$.

Méthode 2 — Décomposition associée à l'involution.

On utilise seulement $\varphi_u \circ \varphi_u = \text{id}_E$ (question 1). Pour $x \in E$, écrivons :

$$x = \frac{x + \varphi_u(x)}{2} + \frac{x - \varphi_u(x)}{2}$$

On a $\varphi_u \left(\frac{x + \varphi_u(x)}{2} \right) = \frac{\varphi_u(x) + x}{2}$, donc le premier vecteur appartient à

$\text{Ker}(\varphi_u - \text{id}_E)$; de même $\varphi_u \left(\frac{x - \varphi_u(x)}{2} \right) = \frac{\varphi_u(x) - x}{2}$, donc le second appartient à $\text{Ker}(\varphi_u + \text{id}_E)$. Ainsi $E = \text{Ker}(\varphi_u - \text{id}_E) + \text{Ker}(\varphi_u + \text{id}_E)$, et cette somme est directe (sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes). En concaténant une base de chacun, on obtient une base de E formée de vecteurs propres : φ_u est diagonalisable.

Comparaison : la méthode 1 utilise la description explicite des sous-espaces propres ; la méthode 2 n'utilise que la relation $\varphi_u^2 = \text{id}_E$ et s'applique donc à toute involution (toute symétrie), même lorsqu'on ne connaît pas ses sous-espaces propres.

Conclusion

φ_u est diagonalisable, de valeurs propres 1 (sous-espace propre D_u) et -1 (sous-espace propre H_u).

(c) Soit $t \in \mathbb{R}^*$; tu est non nul, donc φ_{tu} est définie. Pour $x \in E$, par bilinéarité :

$$\varphi_{tu}(x) = \frac{2\langle x, tu \rangle}{\langle tu, tu \rangle} tu - x = \frac{2t^2\langle x, u \rangle}{t^2\langle u, u \rangle} u - x = \varphi_u(x)$$

la simplification par t^2 étant licite car $t \neq 0$.

Conclusion

$\varphi_{tu} = \varphi_u$; l'application φ_u ne dépend que de la droite D_u et non du vecteur directeur choisi.

5. (a) Comme E est euclidien et Δ est un sous-espace vectoriel, on a $E = \Delta \oplus \Delta^\perp$. Tout $x \in E$ s'écrit donc de manière unique $x = y + z$ avec $y \in \Delta$ et $z \in \Delta^\perp$, et par linéarité :

$$\sigma(x) = \sigma(y) + \sigma(z) = y - z$$

Involutivité. Comme $y \in \Delta$ et $-z \in \Delta^\perp$ (sous-espace vectoriel), on a $\sigma(y - z) = y - (-z) = y + z$. Donc $\sigma(\sigma(x)) = x$ pour tout $x \in E$, soit $\sigma \circ \sigma = \text{id}_E$.

Conservation du produit scalaire. Soient $x_1 = y_1 + z_1$ et $x_2 = y_2 + z_2$ décomposés comme ci-dessus. Comme $\langle y_i, z_j \rangle = 0$ pour tous i, j :

$$\langle \sigma(x_1), \sigma(x_2) \rangle = \langle y_1 - z_1, y_2 - z_2 \rangle = \langle y_1, y_2 \rangle + \langle z_1, z_2 \rangle$$

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \langle y_1 + z_1, y_2 + z_2 \rangle = \langle y_1, y_2 \rangle + \langle z_1, z_2 \rangle$$

Conclusion

σ est involutif et conserve le produit scalaire.

(b) Δ étant une droite vectorielle, choisissons un vecteur u non nul de Δ ; alors $\Delta = D_u$ et donc $\Delta^\perp = D_u^\perp = H_u$.

Sur $\Delta = D_u$: d'après la question 4(b), tout $y \in D_u$ vérifie $\varphi_u(y) = y = \sigma(y)$.

Sur $\Delta^\perp = H_u$: d'après la question 4(a), tout $z \in H_u$ vérifie $\varphi_u(z) = -z = \sigma(z)$.

Les deux applications linéaires σ et φ_u coïncident donc sur les deux sous-espaces supplémentaires Δ et $\Delta^\perp$. Pour $x = y + z \in E$ avec $y \in \Delta$, $z \in \Delta^\perp$:

$$\sigma(x) = \sigma(y) + \sigma(z) = \varphi_u(y) + \varphi_u(z) = \varphi_u(x)$$

Conclusion

il existe $u \in \Delta$ non nul tel que $\sigma = \varphi_u$; en fait tout vecteur non nul de Δ convient, ce qui est cohérent avec la question 4(c).

(c) Notons $M = (m_{k,j})_{1 \leq k, j \leq n}$. Par définition de la matrice de σ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, la j -ième colonne de M contient les coordonnées de $\sigma(e_j)$:

$$\sigma(e_j) = \sum_{k=1}^n m_{k,j} e_k$$

Calcul de $a_{i,j}$. Le coefficient (i, k) de ${}^t M$ est $m_{k,i}$, donc par définition du produit matriciel :

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^n m_{k,i} m_{k,j}$$

Or, dans une base orthonormale, le produit scalaire de deux vecteurs est la somme des produits de leurs coordonnées. Les coordonnées de $\sigma(e_i)$ sont $(m_{1,i}, \dots, m_{n,i})$ et celles de $\sigma(e_j)$ sont $(m_{1,j}, \dots, m_{n,j})$. Donc :

$$a_{i,j} = \langle \sigma(e_i), \sigma(e_j) \rangle$$

Déduction de ${}^t M M = I_n$. Deux méthodes sont possibles.

Méthode 1 — Conservation du produit scalaire. D'après 5(a),

$\langle \sigma(e_i), \sigma(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle$, qui vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon puisque la base est orthonormale.

Donc $a_{i,j} = \delta_{i,j}$ pour tous i, j , c'est-à-dire ${}^tMM = I_n$.

Méthode 2 — Symétrie de σ et involutivité. Avec les notations de 5(a) :

$$\langle \sigma(x_1), x_2 \rangle = \langle y_1 - z_1, y_2 + z_2 \rangle = \langle y_1, y_2 \rangle - \langle z_1, z_2 \rangle = \langle y_1 + z_1, y_2 - z_2 \rangle = \langle x_1, \sigma(x_2) \rangle$$

Donc σ est un endomorphisme symétrique ; sa matrice dans la base orthonormale $\mathcal{B}$ est symétrique : ${}^tM = M$. Par ailleurs, $\sigma \circ \sigma = \text{id}_E$ se traduit par $M^2 = I_n$ (la matrice d'une composée est le produit des matrices). Donc ${}^tMM = M^2 = I_n$.

Comparaison : la méthode 1 n'utilise que la conservation du produit scalaire et s'applique à tout endomorphisme qui la vérifie ; la méthode 2 exploite la structure particulière de σ (symétrique et involutive) et montre de plus que M est symétrique.

Conclusion

$a_{i,j} = \langle \sigma(e_i), \sigma(e_j) \rangle$ et ${}^tMM = I_n$; en particulier M est inversible et $M^{-1} = {}^tM$.

Exercice 2

1. (a) Pour $x > 0$, $f(x) = x^x = e^{x \ln x}$. La fonction f est continue sur $]0, 1]$ comme composée de fonctions continues ; l'intégrale I n'est impropre qu'en 0.

Méthode 1 — Prolongement par continuité.

Par croissances comparées, $x \ln x \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$, donc par continuité de l'exponentielle en 0, $f(x) \rightarrow e^0 = 1$. La fonction f se prolonge en une fonction $\tilde{f}$ continue sur $[0, 1]$ (avec $\tilde{f}(0) = 1$). Si G est une primitive de $\tilde{f}$ sur $[0, 1]$, alors pour $\varepsilon \in]0, 1]$, $\int_{\varepsilon}^1 f(t) dt = G(1) - G(\varepsilon)$, qui tend vers $G(1) - G(0)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$ par continuité de G . L'intégrale converge.

Méthode 2 — Positivité et limite monotone.

Pour $x \in]0, 1]$, $\ln x \leq 0$ donc $x \ln x \leq 0$ et $0 < f(x) \leq 1$. La fonction $\varepsilon \mapsto \int_{\varepsilon}^1 f(t) dt$ est décroissante sur $]0, 1]$ (car $f > 0$) et majorée par $\int_0^1 1 dt = 1$; elle admet donc une limite finie quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$ (théorème de la limite monotone).

Comparaison : la méthode 1 traite l'intégrale comme « faussement impropre » ; la méthode 2 ne demande que le signe et une borne de f , et fournit en plus l'encadrement $0 \leq I \leq 1$.

Conclusion

l'intégrale $I = \int_0^1 f(t) dt$ converge.

(b) On étudie la convergence absolue. Pour $n \geq 2$, $n^n \geq n^2$ (car $n \geq 1$ et $n - 2 \geq 0$ donnent $n^{n-2} \geq 1$), donc :

$$0 \leq |u_n| = \frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{n^2}$$

La série de Riemann

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

converge ($2 > 1$). Par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum |u_n|$$

converge. La série

$$\sum u_n$$

est absolument convergente, donc convergente.

Conclusion

la série de terme général u_n converge (absolument).

2. (a) Pour $p, k \in \mathbb{N}$, la fonction $g_{p,k} : x \mapsto x^p (\ln x)^k$ est continue sur $]0, 1]$ (avec la convention $x^0 = 1$ et $(\ln x)^0 = 1$) ; l'intégrale $K_{p,k}$ n'est impropre qu'en 0.

Cas $p \neq 0$, donc $p \geq 1$. Si $k = 0$, $g_{p,0}(x) = x^p \rightarrow 0$; si $k \geq 1$, $|g_{p,k}(x)| = x^p |\ln x|^k \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$ par croissances comparées (car $p > 0$). Dans tous les cas, $g_{p,k}$ se prolonge par continuité en 0, et comme en 1(a) (méthode 1), $K_{p,k}$ converge.

Cas $p = 0$. Si $k = 0$, $K_{0,0} = \int_0^1 1 dx = 1$ converge. Si $k \geq 1$, $|g_{0,k}(x)| = |\ln x|^k$. Par croissances comparées, $\sqrt{x} |\ln x|^k \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$, c'est-à-dire :

$$|\ln x|^k = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \text{ quand } x \rightarrow 0^+$$

Les fonctions $x \mapsto |\ln x|^k$ et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sont positives et continues sur $]0, 1]$, et $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ converge (intégrale de Riemann en 0 d'exposant $\frac{1}{2} < 1$). Par comparaison par

négligeabilité pour des fonctions positives, $\int_0^1 |\ln x|^k dx$ converge ; ainsi $K_{0,k}$ converge absolument, donc converge.

Cas de J_n . Pour $x \in]0, 1]$, $(x \ln x)^n = x^n (\ln x)^n$ (avec la convention $(x \ln x)^0 = 1$), donc $J_n = K_{n,n}$, qui existe d'après ce qui précède.

Conclusion

pour tous $n, p, k \in \mathbb{N}$, les intégrales $K_{p,k}$ et J_n convergent.

(b) Soit $k \geq 1$. On intègre par parties sur un segment $[\varepsilon, 1]$ avec $\varepsilon \in]0, 1[$, puis on fait tendre ε vers 0.

Les fonctions $x \mapsto (\ln x)^k$ et $x \mapsto \frac{x^{p+1}}{p+1}$ sont de classe C^1 sur $[\varepsilon, 1]$, de dérivées respectives $x \mapsto \frac{k(\ln x)^{k-1}}{x}$ et $x \mapsto x^p$. Par intégration par parties :

$$\int_{\varepsilon}^1 x^p (\ln x)^k dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} (\ln x)^k \right]_{\varepsilon}^1 - \frac{k}{p+1} \int_{\varepsilon}^1 x^p (\ln x)^{k-1} dx$$

En $x = 1$, le crochet vaut 0 car $\ln 1 = 0$ et $k \geq 1$. Donc :

$$\int_{\varepsilon}^1 x^p (\ln x)^k dx = -\frac{\varepsilon^{p+1} (\ln \varepsilon)^k}{p+1} - \frac{k}{p+1} \int_{\varepsilon}^1 x^p (\ln x)^{k-1} dx$$

Quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$: $\varepsilon^{p+1} (\ln \varepsilon)^k \rightarrow 0$ par croissances comparées ($p+1 > 0$) ; les deux intégrales tendent respectivement vers $K_{p,k}$ et $K_{p,k-1}$, qui convergent d'après 2(a).

Conclusion

pour $k \geq 1$, $K_{p,k} = -\frac{k}{p+1} K_{p,k-1}$.

(c) Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que, pour $p \in \mathbb{N}$ fixé :

$$K_{p,k} = \frac{(-1)^k k!}{(p+1)^{k+1}}$$

Initialisation : $K_{p,0} = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}$, ce qui est la formule pour $k = 0$.

Hérédité : soit $k \geq 1$ tel que la formule soit vraie au rang $k-1$. Par 2(b) :

$$K_{p,k} = -\frac{k}{p+1} \cdot \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(p+1)^k} = \frac{(-1)^k k!}{(p+1)^{k+1}}$$

La formule est démontrée pour tout $k \in \mathbb{N}$. En prenant $p = k = n$ et en utilisant $J_n = K_{n,n}$:

Conclusion

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad J_n = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}} \text{ (en particulier } J_0 = 1).$$

3. (a) Étudions $g : x \mapsto x \ln x$ sur $]0, 1]$. Elle est dérivable avec $g'(x) = \ln x + 1$, qui est strictement négatif sur $]0, \frac{1}{e}[$ et strictement positif sur $]\frac{1}{e}, 1]$. Donc g est décroissante sur $]0, \frac{1}{e}]$, croissante sur $[\frac{1}{e}, 1]$, et atteint son minimum en $\frac{1}{e}$:
 $g\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$.

Par ailleurs $g(x) \leq 0$ sur $]0, 1]$ car $x > 0$ et $\ln x \leq 0$. Ainsi, pour tout $x \in]0, 1]$:

$$-\frac{1}{e} \leq x \ln x \leq 0, \text{ donc } |x \ln x| \leq \frac{1}{e}$$

Conclusion

$\frac{1}{e}$ est un majorant de $x \mapsto |x \ln x|$ sur $]0, 1]$; c'est même le maximum, atteint en $x = \frac{1}{e}$.

(b) On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'exponentielle en chaque point $y = x \ln x$, puis on intègre.

Inégalité ponctuelle. La fonction $\exp$ est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$, et $\exp^{(n+1)} = \exp$. Soit $y \leq 0$; sur le segment $[y, 0]$, $|\exp^{(n+1)}(s)| = e^s \leq 1$. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n entre 0 et y donne :

$$\left| e^y - \sum_{k=0}^n \frac{y^k}{k!} \right| \leq \frac{|y|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot 1$$

Soit $x \in]0, 1]$. Par 3(a), $y = x \ln x \in [-\frac{1}{e}, 0]$, donc, comme $e^{x \ln x} = f(x)$:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x \ln x)^k}{k!} \right| \leq \frac{|x \ln x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{1}{e} \right)^{n+1}$$

Intégration. Notons

$$h(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x \ln x)^k}{k!}$$

et $C_n = \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{1}{e} \right)^{n+1}$. Pour $\varepsilon \in]0, 1[$, sur le segment $[\varepsilon, 1]$, par linéarité, inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale :

$$\left| \int_{\varepsilon}^1 f(x) dx - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \int_{\varepsilon}^1 (x \ln x)^k dx \right| = \left| \int_{\varepsilon}^1 h(x) dx \right| \leq \int_{\varepsilon}^1 |h(x)| dx \leq (1 - \varepsilon) C_n \leq C_n$$

Quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$, $\int_{\varepsilon}^1 f \rightarrow I$ (question 1(a)) et $\int_{\varepsilon}^1 (x \ln x)^k dx \rightarrow J_k$ (question 2(a)); la somme étant finie, on peut passer à la limite terme à terme, et par passage à la limite dans l'inégalité large :

Conclusion

pour tout $n \geq 2$ (et en fait pour tout $n \in \mathbb{N}$),

$$\left| I - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} J_k \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{1}{e} \right)^{n+1}.$$

(c) D'après 2(c), $\frac{1}{k!} J_k = \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}$, donc la somme partielle

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}$$

vérifie, pour $n \geq 2$:

$$|I - S_n| \leq \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{1}{e} \right)^{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)!}$$

et $\frac{1}{(n+1)!} \rightarrow 0$. Par encadrement, $S_n \rightarrow I$: la série

$$\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}$$

converge et a pour somme I .

Conclusion

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}.$$

Remarque : en posant $m = k + 1$, cette série s'écrit

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m^m} = - \sum_{m=1}^{+\infty} u_m,$$

ce qui est cohérent avec 1(b) :

$$I = - \sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

(d) Il s'agit de choisir n tel que la majoration de l'erreur soit inférieure à $2 \cdot 10^{-7}$, puis de calculer S_n en contrôlant l'erreur d'arrondi. On n'utilise pas le critère des séries alternées, qui ne figure pas au programme.

Méthode 1 — Majoration de 3(b).

Pour $n = 5$: $\frac{1}{6!}e^{-6} = \frac{e^{-6}}{720}$; comme $e^6 \leq 3^6 = 729$, on a $\frac{e^{-6}}{720} \geq \frac{1}{720 \times 729} > \frac{1}{10^6}$, ce qui ne suffit pas.

Pour $n = 6$: il faut majorer $\frac{e^{-7}}{7!} = \frac{e^{-7}}{5040}$. Comme $e \geq 2,7$:

$2,7^2 = 7,29$, $2,7^3 = 19,683$, $2,7^4 = 7,29^2 = 53,1441$, donc
 $e^7 \geq 2,7^7 = 2,7^4 \times 2,7^3 \geq 53 \times 19,6 = 1038,8$.

Ainsi $5040 e^7 \geq 5040 \times 1038,8 \geq 5,2 \cdot 10^6$, et :

$$|I - S_6| \leq \frac{e^{-7}}{5040} \leq \frac{1}{5,2 \cdot 10^6} \leq 1,93 \cdot 10^{-7}$$

Calcul de S_6 . On a :

$$S_6 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{256} + \frac{1}{3125} - \frac{1}{46656} + \frac{1}{823543}$$

avec $\frac{1}{4} = 0,25$, $\frac{1}{256} = 0,00390625$ et $\frac{1}{3125} = 0,00032$ exactement, puis, à 10^{-10} près, $\frac{1}{27} \approx 0,0370370370$, $\frac{1}{46656} \approx 0,0000214335$ et $\frac{1}{823543} \approx 0,0000012143$. Les erreurs d'arrondi cumulées sont inférieures à 10^{-10} , et :

$S_6 \approx 0,7834305678$ à 10^{-10} près.

Prenons la valeur approchée $0,78343057$. Alors $|S_6 - 0,78343057| \leq 2,3 \cdot 10^{-9}$, et par l'inégalité triangulaire :

$$|I - 0,78343057| \leq 1,93 \cdot 10^{-7} + 0,03 \cdot 10^{-7} \leq 1,96 \cdot 10^{-7} < 2 \cdot 10^{-7}$$

Méthode 2 — Majoration affinée sans majorer $|x \ln x|$ par $\frac{1}{e}$.

Dans 3(b), au lieu de majorer $|x \ln x|^{n+1}$ par $\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$, on intègre directement l'inégalité ponctuelle sur $[\varepsilon, 1]$:

$$\left| \int_{\varepsilon}^1 h(x) dx \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \int_{\varepsilon}^1 |x \ln x|^{n+1} dx$$

Sur $]0, 1]$, $|x \ln x|^{n+1} = (-1)^{n+1} (x \ln x)^{n+1}$, donc le membre de droite tend vers $\frac{(-1)^{n+1} J_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+2)^{n+2}}$ d'après 2(c). Par passage à la limite :

$$|I - S_n| \leq \frac{1}{(n+2)^{n+2}}$$

Pour $n = 5$, la borne $\frac{1}{7^7} = \frac{1}{823543} > 10^{-6}$ ne suffit pas ; pour $n = 6$, $\frac{1}{8^8} = \frac{1}{16777216} < 6 \cdot 10^{-8}$. Avec la valeur arrondie 0,7834306, l'erreur d'arrondi vaut au plus $3,3 \cdot 10^{-8}$, d'où $|I - 0,7834306| \leq 6 \cdot 10^{-8} + 3,3 \cdot 10^{-8} < 10^{-7}$.

Comparaison : la méthode 1 suit l'énoncé mais laisse peu de marge, ce qui impose de garder huit décimales ; la méthode 2 donne une erreur majorée par la valeur absolue du premier terme négligé, résultat analogue à celui des séries alternées mais obtenu ici avec les seuls outils du programme.

Conclusion

$I \approx 0,78343057$ à $2 \cdot 10^{-7}$ près (et même $I \approx 0,7834306$ à 10^{-7} près par la méthode 2).

Problème

Remarque préliminaire sur le produit de convolution. Le rappel de l'énoncé est utilisé avec son hypothèse : la fonction h obtenue doit être continue sauf éventuellement en un nombre fini de points. Dans toutes les situations rencontrées ci-dessous, h sera calculée explicitement et sa continuité vérifiée. Question adaptée au programme actuel : cette hypothèse a été ajoutée au rappel du préambule.

On utilisera aussi le résultat du cours suivant (lemme des coalitions) : si des variables aléatoires sont mutuellement indépendantes, des fonctions de paquets disjoints de ces variables sont indépendantes.

Partie I — Étude de deux guichets

Rappel : X_i suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, de densité $\mathbf{1}_{[0,1]}$, de fonction de répartition $F_{X_i}(s) = 0$ si $s < 0$, s si $0 \leq s \leq 1$, 1 si $s > 1$.

- (a) Il faut montrer que $X'_2 = -X_2$ a la fonction de répartition (ou une densité) de la loi $\mathcal{U}([-1, 0])$.

Méthode 1 — Fonction de répartition. Pour $t \in \mathbb{R}$:

$$F_{X'_2}(t) = P(-X_2 \leq t) = P(X_2 \geq -t) = 1 - P(X_2 < -t) = 1 - F_{X_2}(-t)$$

car $P(X_2 = -t) = 0$ (X_2 est à densité). Donc :

- si $t < -1$: $-t > 1$, $F_{X_2}(-t) = 1$ et $F_{X'_2}(t) = 0$;
- si $-1 \leq t \leq 0$: $F_{X'_2}(t) = 1 - (-t) = t + 1$;
- si $t > 0$: $-t < 0$, $F_{X_2}(-t) = 0$ et $F_{X'_2}(t) = 1$.

On reconnaît la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[-1, 0]$, qui caractérise la loi.

Méthode 2 — Transformation affine. Si X admet une densité f_X et $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$, alors $aX + b$ admet pour densité $t \mapsto \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$. Avec $a = -1$, $b = 0$: X'_2 admet la densité $t \mapsto \mathbf{1}_{[0,1]}(-t) = \mathbf{1}_{[-1,0]}(t)$, densité de $\mathcal{U}([-1, 0])$.

Comparaison : la méthode 1 est la méthode générale par la fonction de répartition ; la méthode 2 applique directement le résultat du cours sur les transformations affines.

Conclusion

X'_2 suit la loi uniforme sur $[-1, 0]$, de densité $\mathbf{1}_{[-1, 0]}$.

(b) On a $Y_1 = X_1 + X'_2$, avec X_1 et X'_2 indépendantes (admis), de densités respectives $f_1 = \mathbf{1}_{[0, 1]}$ et $g = \mathbf{1}_{[-1, 0]}$. On calcule le produit de convolution :

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) g(t-x) dx = \int_0^1 \mathbf{1}_{[-1, 0]}(t-x) dx$$

Or $t-x \in [-1, 0] \iff x \in [t, t+1]$. Donc $h(t)$ est la longueur de l'intervalle $[0, 1] \cap [t, t+1]$:

- si $t < -1$: $t+1 < 0$, l'intersection est vide et $h(t) = 0$;
- si $-1 \leq t \leq 0$: l'intersection est $[0, t+1]$ et $h(t) = t+1$;
- si $0 \leq t \leq 1$: l'intersection est $[t, 1]$ et $h(t) = 1-t$;
- si $t > 1$: l'intersection est vide (ou réduite à un point) et $h(t) = 0$.

Les expressions se raccordent en -1 (valeur 0), en 0 (valeur 1) et en 1 (valeur 0) : h est continue sur $\mathbb{R}$. D'après le rappel du préambule, h est une densité de Y_1 . On pose $\varphi_1 = h$:

$\varphi_1(t) = 0$ sur $] -\infty, -1[$, $\varphi_1(t) = 1+t$ sur $] -1, 0[$, $\varphi_1(t) = 1-t$ sur $]0, 1[$, $\varphi_1(t) = 0$ sur $]1, +\infty[$

autrement dit $\varphi_1(t) = 1 - |t|$ si $|t| \leq 1$ et 0 sinon (densité « triangulaire »).

Fonction de répartition. $\Phi_1(t) = \int_{-\infty}^t \varphi_1(s) ds$:

- si $t < -1$: $\Phi_1(t) = 0$;

- si $-1 \leq t \leq 0$: $\Phi_1(t) = \int_{-1}^t (1+s) ds = \frac{(1+t)^2}{2}$;

- si $0 \leq t \leq 1$:

$$\Phi_1(t) = \frac{1}{2} + \int_0^t (1-s) ds = \frac{1}{2} + t - \frac{t^2}{2} = 1 - \frac{(1-t)^2}{2};$$

- si $t > 1$: $\Phi_1(t) = 1$.

Conclusion

Y_1 admet la densité φ_1 ci-dessus et la fonction de répartition Φ_1 ci-dessus.

(c) $Z_1 = |Y_1|$ est à valeurs positives. Pour $z < 0$, $\Phi_2(z) = P(|Y_1| \leq z) = 0$. Pour $z \geq 0$:

$$\Phi_2(z) = P(-z \leq Y_1 \leq z) = \Phi_1(z) - \Phi_1(-z) + P(Y_1 = -z) = \Phi_1(z) - \Phi_1(-z)$$

puisque Y_1 est à densité. Donc :

- si $0 \leq z \leq 1$:

$$\Phi_2(z) = 1 - \frac{(1-z)^2}{2} - \frac{(1-z)^2}{2} = 1 - (1-z)^2 = 2z - z^2;$$

- si $z > 1$: $\Phi_2(z) = 1 - 0 = 1$.

Φ_2 est continue sur $\mathbb{R}$ (raccords en 0 : valeur 0 ; en 1 : valeur 1) et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ privé de 0 et 1 ; donc Z_1 est une variable à densité, et une densité s'obtient en dérivant Φ_2 là où elle est dérivable (les valeurs en 0 et 1 sont arbitraires) :

Conclusion

$\Phi_2(z) = 0$ si $z < 0$, $2z - z^2$ si $0 \leq z \leq 1$, 1 si $z > 1$; une densité de Z_1 est $\varphi_2(z) = 2(1 - z)$ si $0 \leq z \leq 1$ et 0 sinon.

(d) i. On écrit $Z_1 - X_3 = Z_1 + (-X_3)$. D'après 1(a) appliqué à X_3 , $-X_3$ suit la loi $\mathcal{U}([-1, 0])$, de densité $g = \mathbf{1}_{[-1, 0]}$. Z_1 et X_3 étant indépendantes (admis), Z_1 et $-X_3$ le sont aussi (fonctions de variables indépendantes). Produit de convolution :

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(x) g(t - x) dx = \int_{[0, 1] \cap [t, t+1]} 2(1 - x) dx$$

- si $t < -1$: l'intersection est vide et $h(t) = 0$;
- si $-1 \leq t \leq 0$:
$$h(t) = \int_0^{t+1} 2(1 - x) dx = \left[-(1 - x)^2 \right]_0^{t+1} = 1 - t^2;$$
- si $0 \leq t \leq 1$:
$$h(t) = \int_t^1 2(1 - x) dx = \left[-(1 - x)^2 \right]_t^1 = (1 - t)^2;$$
- si $t > 1$: l'intersection est vide (ou réduite à un point) et $h(t) = 0$.

Raccords : en -1 , $1 - (-1)^2 = 0$; en 0 , les deux expressions valent 1 ; en 1 , $(1 - 1)^2 = 0$. La fonction h est continue sur $\mathbb{R}$; c'est donc une densité de $Z_1 - X_3$.

Conclusion

$\varphi_3(t) = 0$ sur $] -\infty, -1[$, $1 - t^2$ sur $] -1, 0[$, $(1 - t)^2$ sur $] 0, 1[$ et 0 sur $] 1, +\infty[$.

Vérification :
$$\int_{-1}^0 (1 - t^2) dt + \int_0^1 (1 - t)^2 dt = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

ii. Calcul de $P(Z_1 - X_3 \leq 0)$:

$$P(Z_1 - X_3 \leq 0) = \int_{-\infty}^0 \varphi_3(t) dt = \int_{-1}^0 (1 - t^2) dt = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Traduction de l'événement E . A_1 et A_2 quittent la mairie aux instants X_1 et X_2 . Le premier guichet se libère à l'instant $m = \inf(X_1, X_2)$; A_3 s'y présente aussitôt et repart à l'instant $m + X_3$. L'autre usager parmi A_1, A_2 repart à l'instant $M = \sup(X_1, X_2)$, et celui qui est parti le premier est parti à l'instant $m \leq m + X_3$. Donc A_3 quitte la mairie en dernier si et seulement si $m + X_3 > M$, c'est-à-dire :

$$X_3 > M - m = |X_1 - X_2| = Z_1$$

Ainsi $E = (Z_1 - X_3 < 0)$. Comme $Z_1 - X_3$ est à densité, $P(Z_1 - X_3 = 0) = 0$ (ce qui règle aussi le cas, de probabilité nulle, d'une sortie simultanée), donc :

$$P(E) = P(Z_1 - X_3 < 0) = P(Z_1 - X_3 \leq 0) = \frac{2}{3}$$

Conclusion

$$P(Z_1 - X_3 \leq 0) = \frac{2}{3} \text{ et la probabilité que } A_3 \text{ quitte la mairie en dernier est } \frac{2}{3}.$$

2. (a) $\inf(X_1, X_2)$ est l'instant où le premier guichet se libère, c'est-à-dire la durée d'attente de A_3 ; X_3 est la durée de son passage au guichet.

Conclusion

T_3 est le temps total passé par A_3 dans la mairie (attente puis passage au guichet), c'est-à-dire l'instant où A_3 quitte la mairie.

- (b) Pour $x \in \mathbb{R}$, $(\inf(X_1, X_2) > x) = (X_1 > x) \cap (X_2 > x)$. Par indépendance de X_1 et X_2 :

$$P(\inf(X_1, X_2) > x) = P(X_1 > x) P(X_2 > x) = (1 - F_{X_1}(x))^2$$

d'où $F(x) = 1 - (1 - F_{X_1}(x))^2$, soit :

- si $x < 0$: $F(x) = 1 - 1 = 0$;
- si $0 \leq x \leq 1$: $F(x) = 1 - (1 - x)^2 = 2x - x^2$;
- si $x > 1$: $F(x) = 1 - 0 = 1$.

F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf en 0 et 1 ; $\inf(X_1, X_2)$ est donc à densité, et en dérivant :

$$f(x) = 2(1 - x) \text{ si } 0 \leq x \leq 1, f(x) = 0 \text{ sinon.}$$

Conclusion

on remarque que $F = \Phi_2$: la variable $\inf(X_1, X_2)$ a la même loi que $Z_1 = |X_1 - X_2|$ (avec la même densité $f = \varphi_2$).

- (c) Densité de T_3 . La variable $\inf(X_1, X_2)$ est une fonction de (X_1, X_2) ; par le lemme des coalitions, elle est indépendante de X_3 . Leurs densités sont f (question 2(b)) et $\mathbf{1}_{[0,1]}$. Produit de convolution :

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathbf{1}_{[0,1]}(t - x) dx = \int_{[0,1] \cap [t-1,t]} 2(1 - x) dx$$

$$\text{car } t - x \in [0, 1] \iff x \in [t - 1, t].$$

- si $t < 0$: l'intersection est vide et $h(t) = 0$;

- si $0 \leq t \leq 1$: $h(t) = \int_0^t 2(1-x) dx = 2t - t^2$;

- si $1 \leq t \leq 2$:

$$h(t) = \int_{t-1}^1 2(1-x) dx = \left[-(1-x)^2 \right]_{t-1}^1 = (2-t)^2 = (t-2)^2;$$

- si $t > 2$: l'intersection est vide et $h(t) = 0$.

Les valeurs se raccordent en 0 (valeur 0), en 1 (valeur 1) et en 2 (valeur 0) : h est continue sur $\mathbb{R}$, et $h = \varphi$. D'après le rappel du préambule, φ est une densité de T_3 .

Espérance et variance. Deux méthodes sont naturelles : calcul direct à partir de φ , ou utilisation de la décomposition $T_3 = \inf(X_1, X_2) + X_3$.

Méthode 1 — Calcul direct avec la densité φ .

φ est nulle hors de $[0, 2]$, donc T_3 admet des moments de tout ordre (intégrales sur un segment). Pour l'intégrale sur $[1, 2]$, on utilise le changement de variable affine $s = 2 - t$.

$$\begin{aligned} E(T_3) &= \int_0^1 t(2t - t^2) dt + \int_1^2 t(2 - t)^2 dt = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} \right) + \int_0^1 (2 - s)s^2 ds = \frac{5}{12} \\ &+ \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

$$E(T_3^2) = \int_0^1 t^2(2t - t^2) dt + \int_1^2 t^2(2 - t)^2 dt = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) + \int_0^1 (2 - s)^2 s^2 ds$$

$$\int_0^1 (2 - s)^2 s^2 ds = \int_0^1 (4s^2 - 4s^3 + s^4) ds = \frac{4}{3} - 1 + \frac{1}{5} = \frac{8}{15},$$

donc $E(T_3^2) = \frac{3}{10} + \frac{8}{15} = \frac{5}{6}$.

Par la formule de Koenig-Huygens : $V(T_3) = E(T_3^2) - E(T_3)^2 = \frac{5}{6} - \frac{25}{36} = \frac{5}{36}$.

Méthode 2 — Linéarité et indépendance.

Notons $m = \inf(X_1, X_2)$, de densité f . On a $E(m) = \int_0^1 2x(1-x) dx = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ et $E(m^2) = \int_0^1 2x^2(1-x) dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, d'où $V(m) = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$. Pour la loi uniforme sur $[0, 1]$: $E(X_3) = \frac{1}{2}$ et $V(X_3) = \frac{1}{12}$.

Par linéarité de l'espérance : $E(T_3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

Comme m et X_3 sont indépendantes, leur covariance est nulle et

$$V(T_3) = V(m) + V(X_3) = \frac{1}{18} + \frac{1}{12} = \frac{2+3}{36} = \frac{5}{36}.$$

Comparaison : la méthode 1 n'utilise que la densité obtenue ; la méthode 2, plus rapide, n'utilise pas φ mais exige de vérifier l'indépendance pour la variance, et sert de contrôle du calcul de la densité.

Conclusion

$$E(T_3) = \frac{5}{6} \text{ et } V(T_3) = \frac{5}{36}.$$

Partie 2 — Étude de n guichets

Rappel : X_i suit la loi exponentielle de paramètre λ , de densité $x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$ sur $[0, +\infty[$ (nulle sur $] -\infty, 0[$), et pour $t \geq 0$, $P(X_i > t) = e^{-\lambda t}$, $P(X_i \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

Rectification de l'énoncé : dans le document source, la question 1 se limitait à la définition de U_n et la question 2 regroupait l'étude de U_n et celle de V_n . Les demandes ont été regroupées selon leur sens : question 1 pour U_n , question 2 pour V_n , question 3 inchangée.

1. Toutes les personnes commencent à l'instant 0, donc $U_n = \inf(X_1, \dots, X_n)$.

Pour $t \geq 0$, $(U_n > t) = \bigcap_{i=1}^n (X_i > t)$ et, par indépendance mutuelle :

$$P(U_n > t) = \prod_{i=1}^n P(X_i > t) = e^{-n\lambda t}$$

Pour $t < 0$, $P(X_i > t) = 1$ pour tout i , donc $P(U_n > t) = 1$. Ainsi $F_{U_n}(t) = 0$ si $t < 0$ et $F_{U_n}(t) = 1 - e^{-n\lambda t}$ si $t \geq 0$: c'est la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre $n\lambda$, qui caractérise la loi.

Conclusion

$$U_n \text{ suit la loi exponentielle de paramètre } n\lambda; \quad E(U_n) = \frac{1}{n\lambda} \text{ et } V(U_n) = \frac{1}{n^2\lambda^2}.$$

2. On a $V_n = \sup(X_1, \dots, X_n)$.

Fonction de répartition. Pour $t \in \mathbb{R}$, $(V_n \leq t) = \bigcap_{i=1}^n (X_i \leq t)$, donc par indépendance mutuelle

$$F_{V_n}(t) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(t) :$$

$$F_{V_n}(t) = 0 \text{ si } t < 0, \text{ et } F_{V_n}(t) = (1 - e^{-\lambda t})^n \text{ si } t \geq 0.$$

Densité. F_{V_n} est continue sur $\mathbb{R}$ (en 0 les deux expressions valent 0) et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$. V_n est donc à densité, et une densité est :

$$f_{V_n}(t) = n\lambda e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{n-1} \text{ si } t > 0, \text{ et } f_{V_n}(t) = 0 \text{ si } t \leq 0$$

(avec la convention $(1 - e^{-\lambda t})^0 = 1$ lorsque $n = 1$).

Existence de l'espérance. Pour $t > 0$, $0 \leq 1 - e^{-\lambda t} \leq 1$, donc $0 \leq t f_{V_n}(t) \leq n\lambda t e^{-\lambda t}$.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} t e^{-\lambda t} dt$ converge et vaut $\frac{1}{\lambda^2}$ (c'est $\frac{1}{\lambda}$ fois l'espérance d'une variable

de loi $\mathcal{E}(\lambda)$). Par comparaison de fonctions positives, $\int_0^{+\infty} t f_{V_n}(t) dt$ converge : V_n admet une espérance.

On utilisera plus généralement, pour $a > 0$: $\int_0^{+\infty} t e^{-at} dt = \frac{1}{a^2}$ et $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt = \frac{1}{a}$.

Méthode 1 — Développement de la densité par la formule du binôme.

Par la formule du binôme, pour $t > 0$:

$$(1 - e^{-\lambda t})^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j e^{-j\lambda t}$$

donc

$$t f_{V_n}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} n\lambda \binom{n-1}{j} (-1)^j t e^{-(j+1)\lambda t}.$$

Chaque intégrale $\int_0^{+\infty} t e^{-(j+1)\lambda t} dt$ converge et vaut $\frac{1}{(j+1)^2 \lambda^2}$; la somme étant finie, par linéarité :

$$E(V_n) = \sum_{j=0}^{n-1} n\lambda \binom{n-1}{j} \frac{(-1)^j}{(j+1)^2 \lambda^2} = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j}{j+1} \cdot \frac{n}{j+1} \binom{n-1}{j}$$

Or, pour $0 \leq j \leq n-1$:

$$\frac{n}{j+1} \binom{n-1}{j} = \frac{n}{j+1} \cdot \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} = \frac{n!}{(j+1)!(n-(j+1))!} = \binom{n}{j+1}$$

d'où

$$E(V_n) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j}{j+1} \binom{n}{j+1}.$$

Méthode 2 — Intégration par parties et fonction de survie.

Posons $G(t) = 1 - F_{V_n}(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t})^n$ pour $t \geq 0$. Par la formule du binôme :

$$G(t) = 1 - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{-k\lambda t} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} e^{-k\lambda t}$$

G est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et $G'(t) = -f_{V_n}(t)$ pour $t > 0$. Soit $A > 0$. Par intégration par parties sur le segment $[0, A]$:

$$\int_0^A t f_{V_n}(t) dt = [-t G(t)]_0^A + \int_0^A G(t) dt = -A G(A) + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{1 - e^{-k\lambda A}}{k\lambda}$$

Quand $A \rightarrow +\infty$:

$$A G(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} A e^{-k\lambda A} \rightarrow 0$$

par croissances comparées, et $e^{-k\lambda A} \rightarrow 0$. Donc :

$$E(V_n) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k}$$

et le changement d'indice $k = j + 1$ donne la formule demandée.

Comparaison : la méthode 1 travaille sur la densité ; la méthode 2 établit, dans ce cas particulier, la formule $E(V_n) = \int_0^{+\infty} P(V_n > t) dt$, commode lorsque la fonction de répartition est plus simple que la densité.

Conclusion

$F_{V_n}(t) = (1 - e^{-\lambda t})^n$ pour $t \geq 0$ (et 0 sinon), $f_{V_n}(t) = n\lambda e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{n-1}$ pour $t > 0$, et

$$E(V_n) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k+1}.$$

3. La personne A_i a terminé à l'instant t si et seulement si $X_i \leq t$. Pour $1 \leq i \leq n$, posons $B_i = 1$ si $X_i \leq t$ et $B_i = 0$ sinon. Alors

$$W_t = \sum_{i=1}^n B_i.$$

Méthode 1 — Somme de variables de Bernoulli indépendantes.

Chaque B_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $p_t = P(X_i \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} \in]0, 1[$ (car $t > 0$). Les B_i sont des fonctions respectives des X_i , qui sont mutuellement indépendantes ; elles sont donc mutuellement indépendantes. Une somme de n variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p_t suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_t)$ (stabilité des lois binomiales de même paramètre, la loi de Bernoulli étant $\mathcal{B}(1, p_t)$).

Méthode 2 — Dénombrement direct.

Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, l'événement $(W_t = k)$ est la réunion disjointe, sur les parties

$J \subset \{1, \dots, n\}$ de cardinal k , des événements $\bigcap_{i \in J} (X_i \leq t) \cap \bigcap_{i \notin J} (X_i > t)$. Par indépendance mutuelle, chacun a pour probabilité $p_t^k (1 - p_t)^{n-k}$, et il y a $\binom{n}{k}$ telles parties, d'où $P(W_t = k) = \binom{n}{k} p_t^k (1 - p_t)^{n-k}$.

Comparaison : la méthode 1 invoque un résultat de stabilité du cours ; la méthode 2 reconstruit la loi binomiale à partir de sa définition combinatoire.

Espérance : $E(W_t) = np_t$ (par la loi binomiale, ou par linéarité :

$$E(W_t) = \sum_{i=1}^n E(B_i) = np_t$$

).

Conclusion

W_t suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1 - e^{-\lambda t})$ et $E(W_t) = n(1 - e^{-\lambda t})$.

Partie 3 — Étude d'un guichet

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

La loi géométrique de paramètre p donne $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $P(N = n) = p(1 - p)^{n-1} > 0$ pour $n \geq 1$, avec $E(N) = \frac{1}{p}$.

1. Question adaptée au programme actuel : «Rappeler la formule» est remplacé par «Déterminer», le programme ne mentionnant que la loi gamma de taux 1.

Il s'agit de montrer que S_n admet pour densité $f_n(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!}$ si $x > 0$, et $f_n(x) = 0$ si $x \leq 0$.

Méthode 1 — Réduction à la loi gamma de taux 1.

Pour chaque i , λX_i suit la loi $\mathcal{E}(1)$: pour $x \geq 0$, $P(\lambda X_i \leq x) = P\left(X_i \leq \frac{x}{\lambda}\right) = 1 - e^{-x}$, et cette probabilité est nulle pour $x < 0$. Les variables $\lambda X_1, \dots, \lambda X_n$ sont mutuellement indépendantes (fonctions de variables mutuellement indépendantes). La loi $\mathcal{E}(1)$ est la loi $\gamma(1)$ et une somme de variables indépendantes de lois $\gamma(\nu_1), \dots, \gamma(\nu_n)$ suit la loi $\gamma(\nu_1 + \dots + \nu_n)$; donc λS_n suit la loi $\gamma(n)$, de densité $y \mapsto \frac{y^{n-1} e^{-y}}{\Gamma(n)} = \frac{y^{n-1} e^{-y}}{(n-1)!}$ sur $]0, +\infty[$ (nulle ailleurs), puisque $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Enfin $S_n = \frac{1}{\lambda}(\lambda S_n)$; par transformation affine de coefficient $\frac{1}{\lambda} > 0$, S_n admet la densité $x \mapsto \lambda \cdot \frac{(\lambda x)^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} = f_n(x)$ pour $x > 0$, et 0 pour $x \leq 0$.

Méthode 2 — Récurrence par produit de convolution.

Pour $n = 1$, $f_1(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pour $x > 0$: c'est la densité de X_1 . Supposons que S_n admette la densité f_n . $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$, et S_n (fonction de $X_1, \dots, X_n$) est indépendante de X_{n+1} par le lemme des coalitions. Calculons :

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) \lambda e^{-\lambda(t-x)} \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(t-x) dx$$

L'intégrande n'est non nul que si $x > 0$ et $x \leq t$. Si $t \leq 0$, $h(t) = 0$. Si $t > 0$:

$$h(t) = \int_0^t \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda(t-x)} dx = \frac{\lambda^{n+1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!} \int_0^t x^{n-1} dx = \frac{\lambda^{n+1} t^n e^{-\lambda t}}{n!} = f_{n+1}(t)$$

h est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0; d'après le rappel du préambule, f_{n+1} est une densité de S_{n+1} , ce qui achève la récurrence.

Comparaison : la méthode 1 utilise les résultats du cours sur les lois gamma ; la méthode 2 est autonome et n'utilise que le produit de convolution rappelé dans l'énoncé.

Conclusion

$$\sum_{i=1}^n X_i$$

admet pour densité $x \mapsto \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!}$ sur $]0, +\infty[$, nulle sur $] -\infty, 0]$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sur l'événement $(N = n)$, on a $S = S_n$, donc :

$$(S \leq x) \cap (N = n) = (S_n \leq x) \cap (N = n)$$

S_n est une fonction de $(X_1, \dots, X_n)$; par le lemme des coalitions (les variables $N, X_1, X_2, \dots$ étant mutuellement indépendantes), S_n et N sont indépendantes. Donc $P((S \leq x) \cap (N = n)) = P(S_n \leq x) P(N = n)$, et comme $P(N = n) > 0$:

$$P_{(N=n)}(S \leq x) = P(S_n \leq x) = \int_0^x \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!} dt$$

d'après la question 1 (la densité de S_n est nulle sur $] -\infty, 0]$).

Conclusion

$$P_{(N=n)}(S \leq x) = \int_0^x \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!} dt. \text{ Le raisonnement reste valable pour } x \leq 0, \text{ avec } P_{(N=n)}(S \leq x) = P(S_n \leq x) = 0.$$

(b) Fonction de répartition de S . La famille $((N = n))_{n \geq 1}$ est un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales, pour $x > 0$:

$$P(S \leq x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n) P_{(N=n)}(S \leq x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x p(1-p)^{n-1} \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!} dt$$

En permutant

$$\sum$$

et $\int$ (résultat admis par l'énoncé, démontré dans la remarque ci-dessous) :

$$P(S \leq x) = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1} \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!} \right) dt$$

Pour $t \geq 0$ fixé, en posant $m = n - 1$ et en utilisant la série exponentielle :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1} \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!} = p\lambda e^{-\lambda t} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p)t)^m}{m!} = p\lambda e^{-\lambda t} e^{\lambda(1-p)t} = p\lambda e^{-p\lambda t}$$

Donc, pour $x > 0$:

$$F_S(x) = \int_0^x p\lambda e^{-p\lambda t} dt = 1 - e^{-p\lambda x}$$

Pour $x \leq 0$, la même formule des probabilités totales et la fin de 2(a) donnent

$$F_S(x) = \sum_{n \geq 1} P(N = n) \cdot 0 = 0.$$

Remarque — justification de la permutation. Soit $x > 0$ et $c = \lambda(1-p)x \geq 0$. Pour

$t \in [0, x]$, posons $y = \lambda(1-p)t \in [0, c]$. La somme partielle de rang $M+1$ de la série vaut

$$p\lambda e^{-\lambda t} \sum_{m=0}^M \frac{y^m}{m!}.$$

L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à l'exponentielle sur $[0, y]$ (où $e^s \leq e^c$) donne :

$$0 \leq e^y - \sum_{m=0}^M \frac{y^m}{m!} \leq \frac{y^{M+1}}{(M+1)!} e^c \leq \frac{c^{M+1} e^c}{(M+1)!}$$

En multipliant par $p\lambda e^{-\lambda t} \leq p\lambda$ et en intégrant sur $[0, x]$ (somme finie, linéarité) :

$$0 \leq \int_0^x p\lambda e^{-p\lambda t} dt - \sum_{n=1}^{M+1} \int_0^x p(1-p)^{n-1} \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!} dt \leq p\lambda x \frac{c^{M+1} e^c}{(M+1)!}$$

Le majorant tend vers 0 quand $M \rightarrow +\infty$ (croissances comparées de c^{M+1} et $(M+1)!$).

Les sommes partielles de la série des intégrales convergent donc vers $\int_0^x p\lambda e^{-p\lambda t} dt$, ce qui justifie la permutation admise.

Densité et loi. F_S est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$; S est à densité et une densité est $f_S(x) = p\lambda e^{-p\lambda x}$ pour $x > 0$, $f_S(x) = 0$ pour $x \leq 0$.

Conclusion

$F_S(x) = 1 - e^{-p\lambda x}$ pour $x > 0$ et 0 sinon; S suit la loi exponentielle de paramètre $p\lambda$.

(c) D'après 2(b), S suit la loi $\mathcal{E}(p\lambda)$, donc admet une espérance et $E(S) = \frac{1}{p\lambda}$. Par

ailleurs X_i suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$, donc $E(X_i) = \frac{1}{\lambda}$, et N suit la loi géométrique de paramètre p , donc $E(N) = \frac{1}{p}$. Ainsi :

$$E(X_i) E(N) = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{p\lambda} = E(S)$$

Conclusion

$E(S) = E(X_i) E(N)$: en moyenne, le temps total est le nombre moyen d'utilisateurs multiplié par la durée moyenne de passage.

Relevé des adaptations

- Préambule du problème : le rappel sur le produit de convolution est complété par l'hypothèse « h définie et continue sauf éventuellement en un nombre fini de points », conformément à l'énoncé du programme ; les densités obtenues ensuite vérifient toutes cette hypothèse.
- Partie 2, questions 1 et 2 : rectification de la numérotation. Dans le document source, la question 1 ne contenait que la définition de U_n et la question 2 regroupait l'étude de U_n et celle de V_n ; les demandes sont regroupées en question 1 (loi de U_n) et question 2 (loi et espérance de V_n), sans modification de leur contenu.
- Partie 2, question 2 : la notation C_n^{k+1} est remplacée par la notation actuelle $\binom{n}{k+1}$.
- Partie 3, question 1 : « Rappeler la formule donnant une densité » est remplacé par « Déterminer une densité », car le programme ne contient que la loi gamma de taux 1 ; la densité de

$$\sum_{i=1}^n X_i$$

pour des exponentielles de paramètre λ est établie dans le corrigé.

- Exercice 2, question 3(d) : énoncé inchangé ; le critère des séries alternées, hors programme, n'est pas utilisé.

- Partie 3, question 2(b) : la permutation admise par l'énoncé est conservée ; elle est de plus démontrée dans le corrigé avec l'inégalité de Taylor-Lagrange.