



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

1996

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

EXERCICE 1

1.1. Étude préliminaire

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = x^x \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}_+$.
2. Dresser le tableau de variations de f .
3. On considère un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; i, j)$ du plan et l'on note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans ce repère. Quelle est la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à sa tangente $(\mathcal{T})$ en son point d'abscisse 1 ?
4. On note g la restriction de f à l'intervalle $I = \left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$. Démontrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.

1.2. Étude d'une fonction

1. Démontrer qu'il existe une application φ de J sur I telle que :

$$\forall x \in J, \quad \varphi(x)^{\varphi(x)} = x.$$

2. Établir que φ est négligeable devant la fonction logarithme népérien au voisinage de $+\infty$.
3. Déterminer le plus grand intervalle K inclus dans J sur lequel φ est dérivable et montrer que :

$$\forall x \in K, \quad \varphi'(x) = \frac{\varphi(x)}{x(\varphi(x) + \ln x)}.$$

4. On note (Γ) la courbe représentative de φ dans le repère $\mathcal{R}$ et, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, on note $(\mathcal{T}_n)$ la tangente à (Γ) en son point d'abscisse n .

(a) Déterminer l'abscisse u_n du point d'intersection de $(\mathcal{T}_n)$ avec l'axe $(O; i)$.

(b) Donner un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2

Désignant par n un entier naturel, on se propose de déterminer l'ensemble des polynômes P à coefficients réels tels que :

$$P(X) + P(X + 1) = 2X^n \quad (1)$$

Pour des entiers naturels $j \leq k$, on note $\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}$.

1. On considère l'application Φ qui, à tout élément $Q(X)$ de $\mathbb{R}[X]$, associe le polynôme :

$$\Phi[Q(X)] = Q(X) + Q(X + 1).$$

(a) Établir que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

(b) Notant p un entier naturel, on désigne par Φ_p la restriction de Φ à $\mathbb{R}_p[X]$.

i. Montrer que Φ_p est un endomorphisme de $\mathbb{R}_p[X]$.

ii. On note $B_p = (1, X, X^2, \dots, X^p)$ la base canonique de $\mathbb{R}_p[X]$. Établir que la matrice de Φ_p dans B_p est une matrice triangulaire supérieure dont on déterminera les termes diagonaux.

iii. En déduire que Φ_p est un automorphisme de $\mathbb{R}_p[X]$.

(c) Prouver que Φ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

(d) Démontrer qu'il existe un polynôme unique de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant la relation (1). On précisera son degré et on le notera $E_n(X)$.

2. On écrit :

$$E_n(X) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} X^k.$$

(a) Vérifier que :

$$E_n(X+1) + E_n(X) = \sum_{j=0}^n \left[a_{n,j} + \sum_{k=j}^n \binom{k}{j} a_{n,k} \right] X^j.$$

(b) En déduire le système dont les $a_{n,k}$ sont les solutions. Préciser la valeur de $a_{n,n}$.

(c) Déterminer $E_0(X)$, $E_1(X)$ et $E_2(X)$.

(d) Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$E'_n(X) = nE_{n-1}(X)$$

et en déduire l'expression de $E_n^{(k)}(X)$ (dérivée k -ième de $E_n(X)$).

(e) Montrer que :

$$E_n(X) = (-1)^n E_n(1-X)$$

et en déduire, pour n pair strictement positif, la valeur de $E_n(0)$ et de $E_n(1)$, ainsi que, pour n impair, la valeur de $E_n\left(\frac{1}{2}\right)$.

(f) Déterminer $E_3(X)$ et $E_4(X)$.

PROBLÈME

3.1. Étude d'une variable aléatoire X

1. On considère la fonction numérique F de la variable x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

et l'on note (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; i, j)$ (unités : 2 cm sur l'axe des abscisses, 10 cm sur l'axe des ordonnées).

(a) Dresser le tableau de variations de F . On notera f la dérivée de F .

(b) Démontrer que le point $\Omega\left(0, \frac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de (Γ) . Donner une équation de la tangente (Δ) à (Γ) en Ω .

(c) Établir que f est paire et étudier la concavité de (Γ) .

(d) Construire (Γ) et (Δ) .

(e) Prouver que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$ et exprimer $F^{-1}(x)$ pour x élément de $]0, 1[$.

(f) Vérifier que f est une densité de probabilité.

2. On désigne par X une variable aléatoire admettant f pour densité de probabilité.

(a) Déterminer les quartiles de X , c'est-à-dire les réels Q_i vérifiant, pour i entier compris entre 1 et 3 :

$$F(Q_i) = \frac{i}{4}$$

et les faire apparaître sur la figure du 3.1.1.(d).

(b) Soit ε un élément de $]0, 1[$. Exprimer en fonction de ε le plus petit réel α tel que :

$$P(|X| > \alpha) \leq \varepsilon.$$

(c) Montrer que X possède une espérance mathématique et la calculer.

3.2. Calcul des deux intégrales

On se propose dans cette partie de calculer les deux intégrales :

$$I = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx.$$

On rappelle le résultat suivant : si f est une fonction continue sur $]0, 1]$, prolongeable par continuité à droite en 0, alors l'intégrale $\int_0^1 f(x) dx$ est convergente.

1. Étude de la convergence de I et J .

(a) Démontrer que J est convergente.

(b) Pour tout réel ε de $]0, 1]$, on pose :

$$h(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^1 \frac{\ln x}{1+x} dx.$$

Montrer que h est monotone et bornée sur $]0, 1]$. En déduire que l'intégrale I est convergente.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n et pour tout élément x de $[0, 1]$, on a :

$$\frac{1}{1+x} = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k x^k + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x} \quad (2)$$

3. On désigne par k un entier naturel. Établir la convergence de l'intégrale :

$$I_k = \int_0^1 x^k \ln x \, dx$$

et la calculer.

4. Étudier succinctement les variations de la fonction ρ continue sur $[0, 1]$ et définie par :

$$\rho(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, 1], \quad \rho(x) = x \ln x.$$

5. Montrer, grâce à la relation (2), que, pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$\left| \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} \, dx - \sum_{k=0}^n (-1)^k I_k \right| \leq \frac{1}{e(n+1)}$$

puis que la série de terme général $\frac{(-1)^k}{k^2}$ converge et que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = I.$$

6. On note θ la fonction continue sur $[0, 1]$ définie par :

$$\theta(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, 1], \quad \theta(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

(a) Déduire de (2) que, pour tout entier naturel non nul n , il existe une fonction R_n définie sur $[0, 1]$ telle que, pour tout élément x de $[0, 1]$, on ait :

$$\theta(x) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k+1} x^k + R_n(x) \quad \text{et} \quad |R_n(x)| \leq \frac{1}{n+2} x^{n+1}.$$

(b) En déduire que :

$$\left| \int_0^1 \theta(x) dx - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} \right| \leq \frac{1}{(n+2)^2}$$

et que $J = -I$.

7. On admet que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

En déduire que :

$$J = -I = \frac{\pi^2}{12}.$$

3.3. Calcul de la variance de X

1. Prouver que X possède une variance.

2. Démontrer, en utilisant la parité de f et le changement de variable $t = e^{-x}$, que :

$$V(X) = 2 \int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{(1+x)^2} dx.$$

3. Calculer la dérivée de la fonction ψ définie sur $]0, 1]$ par :

$$\psi(x) = \frac{x \ln x}{1+x} - \ln(1+x)$$

et déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x) \psi(x)$.

4. En déduire, grâce à une intégration par parties, que :

$$V(X) = 2(J - I)$$

et donner enfin la valeur de $V(X)$.