



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

1995

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Exercice 1

Question 1

Il s'agit de vérifier que f envoie E dans E et qu'elle est linéaire.

Pour $P \in E$, la dérivée P' est un polynôme ; les produits $(2X + 1)P$ et $(X^2 - 1)P'$ sont donc des polynômes, ainsi que leur différence. Ainsi $f(P) \in E$ et f est une application de E dans E .

Soient $P_1, P_2 \in E$ et $\mu \in \mathbb{R}$. La dérivation est linéaire : $(\mu P_1 + P_2)' = \mu P_1' + P_2'$. Par distributivité du produit de polynômes :

$$\begin{aligned} f(\mu P_1 + P_2) &= (2X + 1)(\mu P_1 + P_2) - (X^2 - 1)(\mu P_1' + P_2') \\ &= \mu [(2X + 1)P_1 - (X^2 - 1)P_1'] + [(2X + 1)P_2 - (X^2 - 1)P_2'] \end{aligned}$$

c'est-à-dire $f(\mu P_1 + P_2) = \mu f(P_1) + f(P_2)$.

Conclusion

f est une application linéaire de E dans E , donc un endomorphisme de E .

Question 2.a

On compare les coefficients du terme de plus haut degré possible de $f(B)$ et de λB .

Comme $B \neq 0$, notons $n = \deg B \in \mathbb{N}$ et écrivons

$$B = \sum_{j=0}^n c_j X^j$$

avec $c_n \neq 0$.

Le polynôme $(2X + 1)B$ est de degré $n + 1$ et son coefficient de X^{n+1} vaut $2c_n$.

Si $n \geq 1$, B' est de degré $n - 1$ de coefficient dominant nc_n , donc $(X^2 - 1)B'$ est de degré $n + 1$ et son coefficient de X^{n+1} vaut nc_n . Si $n = 0$, $B' = 0$ et le coefficient de X^1 dans $(X^2 - 1)B'$ est nul, c'est-à-dire encore égal à nc_n .

Dans tous les cas, $f(B)$ est de degré au plus $n + 1$ et son coefficient de X^{n+1} vaut $(2 - n)c_n$.

Or $f(B) = \lambda B$ est de degré au plus n , donc son coefficient de X^{n+1} est nul : $(2 - n)c_n = 0$. Comme $c_n \neq 0$, on obtient $n = 2$.

Conclusion

tout vecteur propre de f est un polynôme de degré exactement 2.

Question 2.b

On exploite la relation $f(B) = \lambda B$, que l'on écrit sous la forme équivalente :

$$(R_\lambda) \quad (2X + 1 - \lambda)B(X) = (X^2 - 1)B'(X)$$

Racine -1 . En évaluant (R_λ) en -1 , le membre de droite s'annule car $(-1)^2 - 1 = 0$; il reste $(-1 - \lambda)B(-1) = 0$. Pour $\lambda = 3$, cela donne $-4B(-1) = 0$, donc $B(-1) = 0$: -1 est racine de B .

Multiplicité. Puisque -1 est racine de B et que $\deg B = 2$, l'ordre de multiplicité k vérifie $1 \leq k \leq 2$, et $B = (X + 1)^k A$ avec $A(-1) \neq 0$. On a :

$$B' = k(X + 1)^{k-1} A + (X + 1)^k A'$$

donc, en utilisant $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$:

$$(X^2 - 1)B' = (X - 1)(X + 1)^k [kA + (X + 1)A']$$

Le membre de gauche de (R_3) vaut $(2X - 2)B = 2(X - 1)(X + 1)^k A$. La relation (R_3) s'écrit donc :

$$(X-1)(X+1)^k [2A - kA - (X+1)A'] = 0$$

Le polynôme $W = (X-1)(X+1)^k$ est non nul ; si $WV = 0$ avec $W \neq 0$, alors $V = 0$ (sinon le degré du produit serait $\deg W + \deg V \geq 0$). On en déduit :

$$(2-k)A = (X+1)A'$$

En évaluant en -1 : $(2-k)A(-1) = 0$, et comme $A(-1) \neq 0$, on obtient $k = 2$. Il reste alors $(X+1)A' = 0$, donc $A' = 0$ par le même argument : A est un polynôme constant, non nul puisque $A(-1) \neq 0$.

Ainsi, si $f(B) = 3B$ avec $B \neq 0$, alors $B = c(X+1)^2$ avec $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Synthèse. Réciproquement, calculons $f((X+1)^2)$:

$$\begin{aligned} f((X+1)^2) &= (2X+1)(X+1)^2 - (X^2-1) \cdot 2(X+1) \\ &= (X+1)^2 [(2X+1) - 2(X-1)] = 3(X+1)^2 \end{aligned}$$

Le polynôme $(X+1)^2$ est non nul et vérifie $f((X+1)^2) = 3(X+1)^2$.

Conclusion

3 est une valeur propre de f , et les vecteurs propres associés sont exactement les polynômes $c(X+1)^2$ avec $c \neq 0$. Le sous-espace propre associé est $\text{Vect}((X+1)^2)$.

Question 2.c

On procède comme en 2.b, en échangeant les rôles de 1 et -1 .

Racine 1. En évaluant (R_{-1}) en 1 : $(2+1+1)B(1) = 0$, soit $4B(1) = 0$, donc $B(1) = 0$.

Multiplicité. Soit k l'ordre de multiplicité de la racine 1 ; comme $\deg B = 2$, on a $1 \leq k \leq 2$ et $B = (X-1)^k A$ avec $A(1) \neq 0$. Alors :

$$\begin{aligned}(X^2 - 1)B' &= (X + 1)(X - 1) [k(X - 1)^{k-1}A + (X - 1)^k A'] \\ &= (X + 1)(X - 1)^k [kA + (X - 1)A']\end{aligned}$$

et le membre de gauche de (R_{-1}) vaut $(2X + 2)B = 2(X + 1)(X - 1)^k A$. En simplifiant par le polynôme non nul $(X + 1)(X - 1)^k$ comme en 2.b :

$$(2 - k)A = (X - 1)A'$$

En évaluant en 1 : $(2 - k)A(1) = 0$, donc $k = 2$ puisque $A(1) \neq 0$; puis $(X - 1)A' = 0$, donc $A' = 0$ et A est une constante non nulle. Ainsi $B = c(X - 1)^2$ avec $c \neq 0$: la racine 1 est double.

Synthèse :

$$\begin{aligned}f((X - 1)^2) &= (2X + 1)(X - 1)^2 - (X^2 - 1) \cdot 2(X - 1) \\ &= (X - 1)^2 [(2X + 1) - 2(X + 1)] = -(X - 1)^2\end{aligned}$$

Conclusion

-1 est une valeur propre de f , et les vecteurs propres associés sont exactement les polynômes $c(X - 1)^2$ avec $c \neq 0$.

Question 2.d

On évalue (R_λ) en 1 et en -1 , puis on utilise $\deg B = 2$.

En 1 : $(3 - \lambda)B(1) = 0$ et $3 - \lambda \neq 0$, donc $B(1) = 0$.

En -1 : $(-1 - \lambda)B(-1) = 0$ et $-1 - \lambda \neq 0$, donc $B(-1) = 0$.

Le polynôme B , de degré 2, admet les deux racines distinctes 1 et -1 : il est divisible par $(X - 1)(X + 1) = X^2 - 1$, et le quotient est de degré 0. Donc $B = c(X^2 - 1)$ avec $c \neq 0$.

Calculons alors :

$$f(X^2 - 1) = (2X + 1)(X^2 - 1) - (X^2 - 1) \cdot 2X = (X^2 - 1)(2X + 1 - 2X) = X^2 - 1$$

Donc $f(B) = B$. Comme $f(B) = \lambda B$, on a $(\lambda - 1)B = 0$ avec $B \neq 0$, d'où $\lambda = 1$.

Conclusion

dans ce cas $B = c(X^2 - 1) = c(X - 1)(X + 1)$ avec $c \neq 0$, et la valeur propre associée est 1. Réciproquement, ces polynômes sont bien des vecteurs propres associés à 1.

Bilan de la question 2 : les valeurs propres de f sont exactement 3, -1 et 1, de sous-espaces propres respectifs $\text{Vect}((X + 1)^2)$, $\text{Vect}((X - 1)^2)$ et $\text{Vect}(X^2 - 1)$.

Question 3.a

Il suffit de montrer que F est stable par f : la restriction d'une application linéaire à un sous-espace stable est alors linéaire de ce sous-espace dans lui-même.

Calculons les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$:

$$f(1) = (2X + 1) \cdot 1 - (X^2 - 1) \cdot 0 = 1 + 2X$$

$$f(X) = (2X + 1)X - (X^2 - 1) \cdot 1 = 2X^2 + X - X^2 + 1 = 1 + X + X^2$$

$$f(X^2) = (2X + 1)X^2 - (X^2 - 1) \cdot 2X = 2X^3 + X^2 - 2X^3 + 2X = 2X + X^2$$

Ces trois polynômes appartiennent à F . Tout $P \in F$ s'écrit $P = c_0 + c_1X + c_2X^2$, et par linéarité $f(P) = c_0f(1) + c_1f(X) + c_2f(X^2) \in F$.

Conclusion

$f(F) \subset F$, donc g est une application linéaire de F dans F , c'est-à-dire un endomorphisme de F .

Question 3.b

Les colonnes de A sont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ de $g(1)$, $g(X)$, $g(X^2)$, calculées en 3.a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Question 3.c

On construit une base de F formée de vecteurs propres de g à l'aide de la question 2.

Les polynômes $B_1 = (X + 1)^2 = 1 + 2X + X^2$, $B_2 = (X - 1)^2 = 1 - 2X + X^2$ et $B_3 = X^2 - 1$ appartiennent à F , et d'après la question 2 :

$$g(B_1) = 3B_1, \quad g(B_2) = -B_2, \quad g(B_3) = B_3$$

Ce sont donc des vecteurs propres de g associés aux valeurs propres 3, -1 , 1, deux à deux distinctes. D'après le cours, une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre. La famille $\mathcal{C} = (B_1, B_2, B_3)$ est donc une famille libre de trois vecteurs dans F , qui est de dimension 3 : c'est une base de F . (On peut aussi invoquer directement le résultat du cours : un endomorphisme d'un espace de dimension 3 possédant 3 valeurs propres distinctes est diagonalisable.)

La matrice de g dans la base $\mathcal{C}$ est :

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$, dont les colonnes sont les coordonnées de B_1, B_2, B_3 dans $\mathcal{B}$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Une matrice de passage entre deux bases est inversible, donc $P \in GL_3(\mathbb{R})$, et la formule de changement de base donne $D = P^{-1}AP$, soit $A = PDP^{-1}$.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $A^n = PD^nP^{-1}$.

Pour $n = 0$: $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_3 = A^0$.

Si $A^n = PD^nP^{-1}$ pour un $n \in \mathbb{N}$, alors $A^{n+1} = A^nA = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$.

Conclusion

avec D diagonale et $P \in GL_3(\mathbb{R})$ ci-dessus, on a $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question 3.d

Méthode 1 — Calcul de P^{-1} puis du produit PD^nP^{-1}

On calcule P^{-1} en résolvant le système $PX = Y$ d'inconnue $X = (u, v, w)$ et de second

membre $Y = (y_1, y_2, y_3)$:

$$u + v - w = y_1, \quad 2u - 2v = y_2, \quad u + v + w = y_3$$

En ajoutant et en soustrayant la première et la troisième équation : $u + v = \frac{y_1 + y_3}{2}$ et $w = \frac{y_3 - y_1}{2}$. La deuxième donne $u - v = \frac{y_2}{2}$. Donc :

$$u = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{4}, \quad v = \frac{y_1 - y_2 + y_3}{4}, \quad w = \frac{-y_1 + y_3}{2}$$

Le système admet une unique solution pour tout second membre, ce qui confirme l'inversibilité de P , et :

$$P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Comme D est diagonale, $D^n = \text{diag}(3^n, (-1)^n, 1)$, d'où :

$$PD^n = \begin{pmatrix} 3^n & (-1)^n & -1 \\ 2 \cdot 3^n & -2(-1)^n & 0 \\ 3^n & (-1)^n & 1 \end{pmatrix}$$

En multipliant par P^{-1} , on obtient par exemple pour le coefficient $(1, 1)$:

$\frac{1}{4}(3^n + (-1)^n + 2)$, pour le coefficient $(2, 1)$: $\frac{1}{4}(2 \cdot 3^n - 2(-1)^n)$, et de même pour les autres. Finalement :

$$A^n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3^n + (-1)^n + 2 & 3^n - (-1)^n & 3^n + (-1)^n - 2 \\ 2(3^n - (-1)^n) & 2(3^n + (-1)^n) & 2(3^n - (-1)^n) \\ 3^n + (-1)^n - 2 & 3^n - (-1)^n & 3^n + (-1)^n + 2 \end{pmatrix}$$

Vérifications : pour $n = 0$ on retrouve I_3 , et pour $n = 1$ on retrouve A .

Méthode 2 — Polynôme annulateur et division euclidienne

Soit $Q = (X - 3)(X + 1)(X - 1)$. Comme $A = PDP^{-1}$, on a $Q(A) = PQ(D)P^{-1}$, et $Q(D) = \text{diag}(Q(3), Q(-1), Q(1)) = 0$. Donc Q est un polynôme annulateur de A .

Soit $n \in \mathbb{N}$. La division euclidienne de X^n par Q , de degré 3, s'écrit $X^n = QS_n + R_n$ avec $R_n = a_n X^2 + b_n X + c_n$. En évaluant en 3, -1 et 1, racines de Q :

$$9a_n + 3b_n + c_n = 3^n, \quad a_n - b_n + c_n = (-1)^n, \quad a_n + b_n + c_n = 1$$

Les deux dernières équations donnent $b_n = \frac{1 - (-1)^n}{2}$ et $a_n + c_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$. La première donne alors $8a_n = 3^n - 3b_n - (a_n + c_n) = 3^n - 2 + (-1)^n$. Ainsi :

$$a_n = \frac{3^n + (-1)^n - 2}{8}, \quad b_n = \frac{1 - (-1)^n}{2}, \quad c_n = \frac{6 + 3(-1)^n - 3^n}{8}$$

Comme $Q(A) = 0$, on a $A^n = Q(A)S_n(A) + R_n(A) = a_n A^2 + b_n A + c_n I_3$, avec :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Le coefficient $(1, 1)$ vaut

$$3a_n + b_n + c_n = 2a_n + b_n + (a_n + c_n) = \frac{3^n + (-1)^n - 2}{4} + 1 = \frac{3^n + (-1)^n + 2}{4};$$

le coefficient $(1, 2)$ vaut $2a_n + b_n = \frac{3^n - (-1)^n}{4}$; le coefficient $(1, 3)$ vaut

$2a_n = \frac{3^n + (-1)^n - 2}{4}$; le coefficient $(2, 1)$ vaut $4a_n + 2b_n = \frac{3^n - (-1)^n}{2}$; le coefficient

$(2, 2)$ vaut $5a_n + b_n + c_n = \frac{3^n + (-1)^n}{2}$. Les autres coefficients s'obtiennent de même, et l'on retrouve exactement la matrice de la méthode 1.

Comparaison des méthodes : la méthode 1 exploite directement la diagonalisation obtenue en 3.c et demande le calcul de P^{-1} ; la méthode 2 évite l'inversion de P et ne demande que A^2 , au prix d'une division euclidienne. Elle est particulièrement efficace lorsqu'on connaît un polynôme annulateur de petit degré à racines simples connues.

Conclusion

pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n est la matrice donnée ci-dessus.

Exercice 2

Question 1.a

Pour $x > 1$, la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$$

est une série de Riemann d'exposant $x > 1$: elle converge.

Conclusion

$f(x)$ est bien défini pour tout $x > 1$.

Question 1.b

On utilise les croissances comparées puis un critère de négligeabilité pour des séries à termes positifs.

Pour $n \geq 1$:

$$\frac{x+1}{n^{\frac{x-1}{2}}} \ln^2(n) u_n(x) = \frac{\ln^2(n)}{n^{\frac{x+1}{2}}} = \frac{\ln^2(n)}{n^{\frac{x-1}{2}}}$$

Comme $\frac{x-1}{2} > 0$, les croissances comparées donnent $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2(n)}{n^{\frac{x-1}{2}}} = 0$.

Ainsi $\ln^2(n) u_n(x) = o\left(\frac{1}{n^{\frac{x+1}{2}}}\right)$. Les deux suites sont positives, et la série de

Riemann

$$\sum \frac{1}{n^{\frac{x+1}{2}}}$$

converge car $\frac{x+1}{2} > 1$ (puisque $x > 1$). Par le critère de négligeabilité pour les séries à termes positifs, la série

$$\sum \ln^2(n) u_n(x)$$

converge.

Pour $n \geq 3$, on a $\ln(n) \geq 1$, donc $0 \leq \ln(n) u_n(x) \leq \ln^2(n) u_n(x)$. Par comparaison de séries à termes positifs (les deux premiers termes n'influent pas sur la nature), la série

$$\sum \ln(n) u_n(x)$$

converge.

Conclusion

la limite cherchée vaut 0, et les séries de termes généraux $\ln^2(n) u_n(x)$ et $\ln(n) u_n(x)$ convergent pour tout $x > 1$.

Question 1.c

On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 à la fonction $t \mapsto u_n(t)$, puis on somme.

Première inégalité. Fixons $n \geq 1$ et posons $\varphi(t) = n^{-t} = e^{-t \ln(n)}$ pour $t \in \mathbb{R}$. La fonction φ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\varphi'(t) = -\ln(n) e^{-t \ln(n)}, \quad \varphi''(t) = \ln^2(n) e^{-t \ln(n)}$$

Soit I le segment d'extrémités x et $x + h$. Pour $t \in I$, on a

$t \geq x - |h| \geq x - \frac{x-1}{2} = \frac{x+1}{2}$. Comme $\ln(n) \geq 0$, la fonction $t \mapsto e^{-t \ln(n)}$ est décroissante, donc pour $t \in I$:

$$0 \leq \varphi''(t) \leq \ln^2(n) e^{-\frac{x+1}{2} \ln(n)} = \ln^2(n) u_n\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1, appliquée à φ de classe C^2 sur I , donne :

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x) - h\varphi'(x)| \leq \frac{|h|^2}{2} \sup_{t \in I} |\varphi''(t)|$$

Comme $\varphi(x+h) = u_n(x+h)$, $\varphi(x) = u_n(x)$ et $-h\varphi'(x) = h \ln(n) u_n(x)$, on obtient :

$$|u_n(x+h) - u_n(x) + h \ln(n) u_n(x)| \leq \frac{h^2}{2} u_n\left(\frac{x+1}{2}\right) \ln^2(n)$$

Seconde inégalité. On a $x+h \geq \frac{x+1}{2} > 1$, donc les séries

$$\sum u_n(x+h)$$

et

$$\sum u_n(x)$$

convergent (question 1.a), la série

$$\sum \ln(n) u_n(x)$$

converge (question 1.b), et la série

$$\sum \ln^2(n) u_n\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

converge (question 1.b appliquée au réel $\frac{x+1}{2} > 1$).

Pour $N \geq 1$, par l'inégalité triangulaire et la première inégalité :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^N (u_n(x+h) - u_n(x) + h \ln(n) u_n(x)) \right| &\leq \frac{h^2}{2} \sum_{n=1}^N \ln^2(n) u_n\left(\frac{x+1}{2}\right) \\ &\leq \frac{h^2}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \ln^2(n) u_n\left(\frac{x+1}{2}\right) \end{aligned}$$

la dernière inégalité venant de la positivité des termes. Par linéarité des sommes finies, la somme de gauche vaut

$$\sum_{n=1}^N u_n(x+h) - \sum_{n=1}^N u_n(x) + h \sum_{n=1}^N \ln(n) u_n(x),$$

qui tend vers

$$f(x+h) - f(x) + h \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) u_n(x)$$

quand $N \rightarrow +\infty$, puisque les trois séries convergent. La valeur absolue étant continue, le passage à la limite dans l'inégalité large donne :

$$\left| f(x+h) - f(x) + h \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) u_n(x) \right| \leq \frac{h^2}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \ln^2(n) u_n\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

Conclusion

les deux inégalités demandées sont établies pour tout h tel que $|h| \leq \frac{x-1}{2}$.

Question 1.d

On étudie le taux d'accroissement de f en x grâce à l'inégalité précédente.

Fixons $x > 1$ et notons

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln^2(n) u_n\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

et

$$L = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) u_n(x),$$

deux réels qui ne dépendent pas de h . Pour $0 < |h| \leq \frac{x-1}{2}$, en divisant par $|h| > 0$:

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + L \right| \leq \frac{|h|}{2} S$$

Le membre de droite tend vers 0 quand $h \rightarrow 0$. Par encadrement,
 $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \rightarrow -L$ quand $h \rightarrow 0$.

Conclusion

f est dérivable en tout point $x > 1$, donc sur $]1, +\infty[$, et :

$$\forall x > 1, \quad f'(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) u_n(x) = - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^x}$$

Question 2.a

On utilise la décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ sur $[1, +\infty[$ puis la relation de Chasles.

Pour $x > 1$, la fonction $t \mapsto t^{-x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ (sa dérivée $-xt^{-x-1}$ est négative). Soit $k \geq 1$ entier. Pour $t \in [k, k+1]$:

$$\frac{1}{(k+1)^x} \leq \frac{1}{t^x} \leq \frac{1}{k^x}$$

Par croissance de l'intégrale sur le segment $[k, k+1]$, de longueur 1 :

$$\frac{1}{(k+1)^x} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{k^x}$$

Soit $N \geq 1$. Pour $N = 1$, les trois membres de l'encadrement demandé sont nuls (somme vide, intégrales sur $[2, 2]$ et $[1, 1]$). Supposons $N \geq 2$.

Majoration : avec l'inégalité de gauche pour $1 \leq k \leq N-1$ et la relation de Chasles :

$$\sum_{n=2}^N \frac{1}{n^x} = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{(k+1)^x} \leq \sum_{k=1}^{N-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} = \int_1^N \frac{dt}{t^x}$$

Minoration : avec l'inégalité de droite pour $2 \leq k \leq N$:

$$\sum_{n=2}^N \frac{1}{n^x} = \sum_{k=2}^N \frac{1}{k^x} \geq \sum_{k=2}^N \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} = \int_2^{N+1} \frac{dt}{t^x}$$

Conclusion

pour tout $N \geq 1$,

$$\int_2^{N+1} \frac{dt}{t^x} \leq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^x} \leq \int_1^N \frac{dt}{t^x}.$$

Question 2.b

On calcule les intégrales puis on fait tendre N vers $+\infty$.

Une primitive de $t \mapsto t^{-x}$ sur $]0, +\infty[$ est $t \mapsto \frac{t^{1-x}}{1-x}$, donc :

$$\int_1^N \frac{dt}{t^x} = \frac{1 - N^{1-x}}{x-1}, \quad \int_2^{N+1} \frac{dt}{t^x} = \frac{2^{1-x} - (N+1)^{1-x}}{x-1}$$

Comme $1-x < 0$, $N^{1-x} \rightarrow 0$ et $(N+1)^{1-x} \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow +\infty$. Les intégrales tendent donc respectivement vers $\frac{1}{x-1}$ et $\frac{2^{1-x}}{x-1} = \frac{1}{(x-1)2^{x-1}}$, et

$$\sum_{n=2}^N \frac{1}{n^x}$$

tend vers $f(x) - 1$. Le passage à la limite dans les inégalités larges de 2.a donne :

$$\frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq f(x) - 1 \leq \frac{1}{x-1}$$

Conclusion

$$\forall x > 1, \quad 1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}.$$

Question 2.c

On applique le théorème d'encadrement (ou de minoration) à l'encadrement de 2.b.

Limite en 1^+ . Quand $x \rightarrow 1^+$, $x-1 \rightarrow 0^+$ et $2^{x-1} \rightarrow 1$, donc $(x-1)2^{x-1} \rightarrow 0^+$ et $\frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \rightarrow +\infty$. Par minoration, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$.

Limite en $+\infty$. Pour $x > 1$, on a $1 < 1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$, et

$1 + \frac{1}{x-1} \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow +\infty$. Par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

Conclusion

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$; la courbe de f admet la droite d'équation $x = 1$ comme asymptote verticale et la droite d'équation $y = 1$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.

Question 2.d

Il s'agit d'établir le sens de variation de f , puis de tracer l'allure de la courbe à l'aide des limites et des valeurs admises.

Méthode 1 — Signe de la dérivée

D'après 1.d, pour $x > 1$,

$$f'(x) = - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^x}.$$

Tous les termes de cette série sont positifs, donc sa somme est minorée par son premier terme :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^x} \geq \frac{\ln 2}{2^x} > 0.$$

Ainsi $f'(x) < 0$ pour tout $x > 1$, et f est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

Méthode 2 — Comparaison terme à terme

Soient $1 < x < y$. Pour tout $n \geq 2$, $\ln(n) > 0$ donc $\frac{1}{n^y} = e^{-y \ln(n)} < e^{-x \ln(n)} = \frac{1}{n^x}$, et pour $n = 1$ les deux termes valent 1. Les séries convergent, on a

$$f(x) - f(y) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{n^y} \right) \geq \frac{1}{2^x} - \frac{1}{2^y} > 0,$$

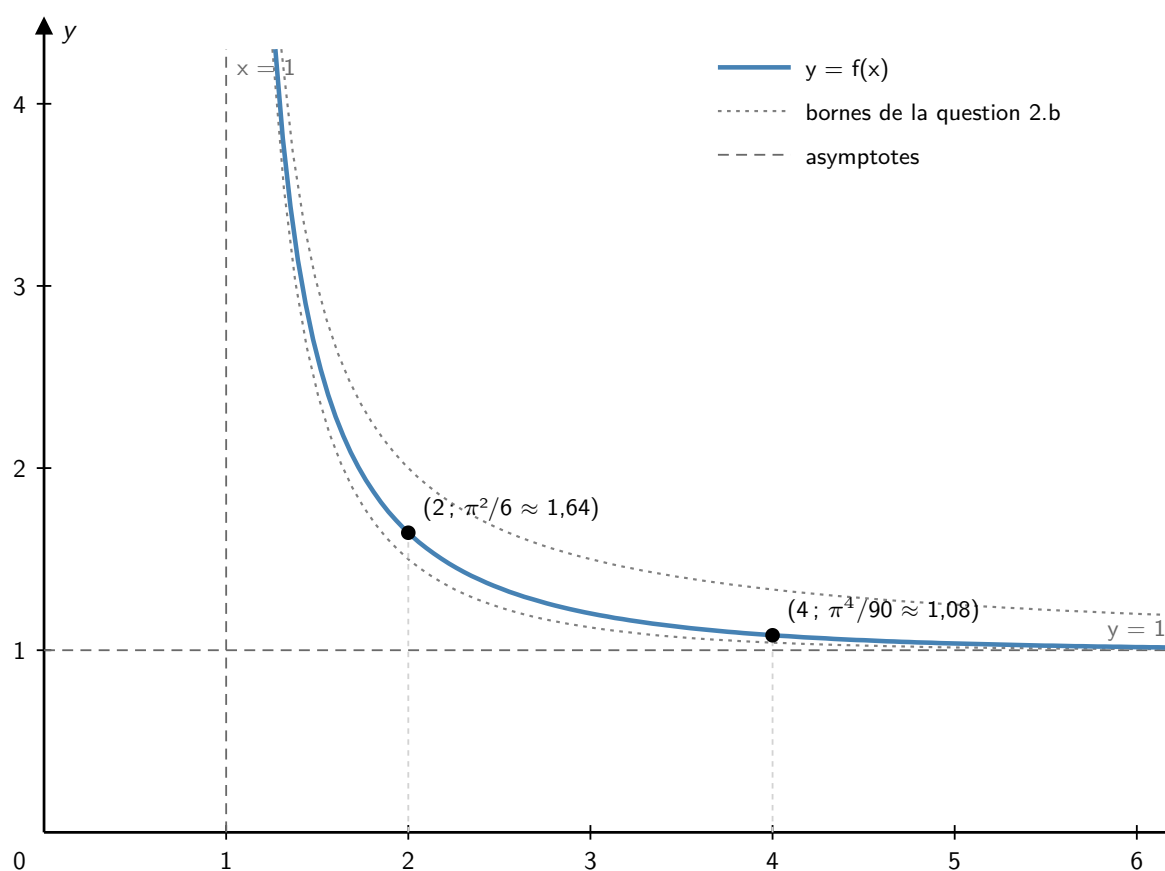
car c'est la somme d'une série à termes positifs dont le premier terme est strictement positif. Donc f est strictement décroissante.

Comparaison des méthodes : la méthode 1 réutilise le travail de la partie 1 (dérivabilité et expression de f') ; la méthode 2 est plus élémentaire et ne nécessite pas la dérivabilité, elle s'applique dès qu'une somme de série a des termes tous monotones dans le même sens.

Tableau de variations : f décroît strictement de $+\infty$ (en 1^+) à 1 (en $+\infty$), et ne prend que des valeurs strictement supérieures à 1.

Points de la courbe : $f(2) = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,645$ et $f(4) = \frac{\pi^4}{90} \approx 1,082$. On peut vérifier leur compatibilité avec 2.b : en $x = 2$, l'encadrement donne $1,5 \leq f(2) \leq 2$; en $x = 4$, il donne $1 + \frac{1}{24} \leq f(4) \leq 1 + \frac{1}{3}$.

Allure de la courbe dans un repère orthonormal (une unité du graphique correspondant à 4 cm sur la copie) ; la courbe a été tracée à partir de valeurs de f calculées numériquement, les bornes de 2.b figurant en pointillés :



Conclusion

f est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$, avec une asymptote verticale d'équation $x = 1$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$, la courbe restant au-dessus de cette dernière.

Problème

Partie 1 — Énoncé rectifié

Énoncé rectifié : l'original impose la relation $U_n = pU_{n+1} + qU_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ non nul, tout en se donnant U_0 et U_{a+b} . La suite étant utilisée dans les parties 2 et 3 pour des indices compris entre 0 et $a+b$, la relation est imposée pour $1 \leq n \leq a+b-1$ et l'égalité de 1.c pour $0 \leq n \leq a+b$. Les raisonnements ci-dessous s'appliquent aussi, sans changement, aux termes d'indices 0 à $a+b$ d'une suite vérifiant la relation pour tout $n \geq 1$.

Dans toute la suite, $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p \in]0, 1[$, donc $p > 0$, $q > 0$ et $x = \frac{q}{p} > 0$. De plus $x = 1$ si et seulement si $p = q$, c'est-à-dire $p = q = \frac{1}{2}$.

Question 1.a

Soit $n \in \{1, \dots, a+b-1\}$. Comme $p+q=1$, on a $U_n = (p+q)U_n = pU_n + qU_n$. La relation de récurrence donne alors $pU_n + qU_n = pU_{n+1} + qU_{n-1}$, soit :

$$p(U_{n+1} - U_n) = q(U_n - U_{n-1})$$

Conclusion

la relation demandée est vérifiée pour tout $n \in \{1, \dots, a+b-1\}$.

Question 1.b

Si $p = q$, alors $p = q = \frac{1}{2} \neq 0$ et la relation de 1.a donne $U_{n+1} - U_n = U_n - U_{n-1}$ pour $1 \leq n \leq a+b-1$. Par récurrence immédiate, $U_{n+1} - U_n = U_1 - U_0$ pour tout $n \in \{0, \dots, a+b-1\}$: la suite U est arithmétique de raison $r = U_1 - U_0$.

On a donc $U_n = U_0 + nr$ pour $0 \leq n \leq a+b$. En particulier $U_{a+b} = U_0 + (a+b)r$, d'où $r = \frac{U_{a+b} - U_0}{a+b}$ (avec $a+b \geq 2 > 0$).

Conclusion

$$\forall n \in \{0, \dots, a+b\}, \quad U_n = U_0 + \frac{n}{a+b} (U_{a+b} - U_0).$$

Question 1.c

Méthode 1 — Suite des différences (télescopage)

Comme $p > 0$, la relation de 1.a s'écrit $U_{n+1} - U_n = x(U_n - U_{n-1})$ pour $1 \leq n \leq a+b-1$. La suite des différences $d_n = U_{n+1} - U_n$, pour $0 \leq n \leq a+b-1$, est donc géométrique de raison x : $d_n = x^n(U_1 - U_0)$.

Pour $0 \leq n \leq a+b$, par télescopage et somme géométrique de raison $x \neq 1$:

$$U_n = U_0 + \sum_{j=0}^{n-1} d_j = U_0 + (U_1 - U_0) \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

En posant $\beta = \frac{U_1 - U_0}{x - 1}$ et $\alpha = U_0 - \beta$, on obtient $U_n = \alpha + \beta x^n$ pour tout $n \in \{0, \dots, a+b\}$.

Méthode 2 — Équation caractéristique

Prolongeons U en une suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant $V_0 = U_0$, $V_1 = U_1$ et $V_{n+1} = \frac{V_n - qV_{n-1}}{p}$ pour $n \geq 1$ (licite car $p \neq 0$). Pour $1 \leq n \leq a+b-1$, la relation de récurrence donne $U_{n+1} = \frac{U_n - qU_{n-1}}{p}$, donc par récurrence $V_n = U_n$ pour $0 \leq n \leq a+b$.

La suite V vérifie la récurrence linéaire d'ordre deux $pV_{n+2} - V_{n+1} + qV_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'équation caractéristique $pr^2 - r + q = 0$. Le réel 1 en est racine car $p - 1 + q = 0$, et le produit des racines vaut $\frac{q}{p} = x$: les racines sont 1 et x , réelles et distinctes car

$x \neq 1$. D'après le cours, il existe deux réels α et β tels que $V_n = \alpha \cdot 1^n + \beta x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où $U_n = \alpha + \beta x^n$ pour $0 \leq n \leq a + b$.

Comparaison des méthodes : la méthode 1 prolonge naturellement la question 1.a et fonctionne directement sur une suite finie ; la méthode 2 applique le résultat général du cours sur les récurrences linéaires d'ordre deux, mais demande de prolonger la suite finie en une suite infinie.

Détermination de α et β . Les conditions aux bords donnent :

$$\alpha + \beta = U_0, \quad \alpha + \beta x^{a+b} = U_{a+b}$$

Par soustraction, $\beta(x^{a+b} - 1) = U_{a+b} - U_0$. Comme $x > 0$ et $x \neq 1$, on a $x^{a+b} \neq 1$, donc $\beta = \frac{U_{a+b} - U_0}{x^{a+b} - 1}$ et $\alpha = U_0 - \beta$.

Conclusion

$$\forall n \in \{0, \dots, a + b\}, \quad U_n = U_0 + (U_{a+b} - U_0) \frac{x^n - 1}{x^{a+b} - 1}.$$

Question 2.a

On applique la formule des probabilités totales au système complet $(A, \overline{A})$ formé par le résultat du premier choix.

On a $P(A) = q > 0$ et $P(\overline{A}) = p > 0$. Soit $1 \leq k \leq a + b - 1$: au départ, l'urne A contient $k \geq 1$ boules et l'urne B en contient $a + b - k \geq 1$, donc aucune urne n'est vide et le premier tirage a bien lieu.

Si le premier tirage se fait dans A , l'urne A contient ensuite $k - 1$ boules. Les épreuves suivantes sont répétées dans les mêmes conditions, indépendamment du premier choix ; la suite de l'expérience se déroule donc comme une expérience partant de $k - 1$ boules dans l'urne A . Ainsi $P_A(E_k) = P(E_{k-1})$; lorsque $k - 1 = 0$, l'urne A est vide après le premier tirage et $P_A(E_k) = 1 = P(E_0)$, ce qui est cohérent avec la convention de l'énoncé.

De même, si le premier tirage se fait dans B , l'urne A contient ensuite $k + 1$ boules et $P_{\bar{A}}(E_k) = P(E_{k+1})$ (avec $P(E_{a+b}) = 0$ lorsque $k + 1 = a + b$: l'urne B est alors vide et l'expérience s'arrête sans que A soit vide).

La formule des probabilités totales donne $P(E_k) = P(A)P_A(E_k) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(E_k)$.

Conclusion

$$\forall k \in \{1, \dots, a + b - 1\}, \quad P(E_k) = q P(E_{k-1}) + p P(E_{k+1}).$$

Question 2.b.i

La famille $(P(E_k))_{0 \leq k \leq a+b}$ vérifie la relation de la partie 1 avec $U_0 = P(E_0) = 1$ et $U_{a+b} = P(E_{a+b}) = 0$. Comme $1 \leq a \leq a + b - 1$, on peut lire $P(E_a) = U_a$ dans les formules de la partie 1.

Cas $p = q$: d'après 1.b, $P(E_k) = 1 - \frac{k}{a+b}$, donc $P(E_a) = \frac{b}{a+b}$.

Cas $p \neq q$: d'après 1.c, $P(E_k) = 1 - \frac{x^k - 1}{x^{a+b} - 1} = \frac{x^{a+b} - x^k}{x^{a+b} - 1}$, donc :

$$P(E_a) = \frac{x^{a+b} - x^a}{x^{a+b} - 1}$$

Conclusion

$$P(E_a) = \frac{b}{a+b} \text{ si } p = q, \text{ et } P(E_a) = \frac{x^{a+b} - x^a}{x^{a+b} - 1} \text{ si } p \neq q.$$

Question 2.b.ii

On distingue selon la position de x par rapport à 1, a , p et q étant fixés.

Cas $p = q$: $\frac{b}{a+b} = \frac{1}{1 + \frac{a}{b}} \rightarrow 1$ quand $b \rightarrow +\infty$.

Cas $p < q$, c'est-à-dire $x > 1$: en divisant numérateur et dénominateur par $x^{a+b} \neq 0$, $P(E_a) = \frac{1 - x^{-b}}{1 - x^{-(a+b)}}$. Comme $0 < \frac{1}{x} < 1$, $x^{-b} \rightarrow 0$ et $x^{-(a+b)} \rightarrow 0$, donc $P(E_a) \rightarrow 1$.

Cas $p > q$, c'est-à-dire $0 < x < 1 : x^{a+b} \rightarrow 0$, donc $P(E_a) \rightarrow \frac{0 - x^a}{0 - 1} = x^a$.

Conclusion

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} P(E_a) = 1 \text{ si } p \leq q, \text{ et } \lim_{b \rightarrow +\infty} P(E_a) = \left(\frac{q}{p}\right)^a \text{ si } p > q.$$

Question 2.b.iii

Quand $p \rightarrow \frac{1}{2}$ avec $p \neq \frac{1}{2}$, on a $x = \frac{1-p}{p} \rightarrow 1$ avec $x \neq 1$, par continuité de $p \mapsto \frac{1-p}{p}$ en $\frac{1}{2}$. On écrit $P(E_a) = x^a \frac{x^b - 1}{x^{a+b} - 1}$ et l'on étudie la limite du quotient quand $x \rightarrow 1, x \neq 1$.

Méthode 1 — Factorisation géométrique

Pour tout entier $m \geq 1$ et $x \neq 1$,

$$x^m - 1 = (x - 1) \sum_{j=0}^{m-1} x^j.$$

Donc :

$$\frac{x^b - 1}{x^{a+b} - 1} = \frac{\sum_{j=0}^{b-1} x^j}{\sum_{j=0}^{a+b-1} x^j}$$

Ce quotient de deux polynômes en x , dont le dénominateur vaut $a + b \neq 0$ en 1, tend vers $\frac{b}{a+b}$ quand $x \rightarrow 1$.

Méthode 2 — Équivalents

Pour $m \geq 1$, $x^m - 1 = e^{m \ln x} - 1$. Quand $x \rightarrow 1$, $u = m \ln x \rightarrow 0$ avec $u \neq 0$ pour $x \neq 1$, et $\frac{e^u - 1}{u} \rightarrow 1$ quand $u \rightarrow 0$ (dérivée de l'exponentielle en 0). Par composition des limites, $\frac{x^m - 1}{m \ln x} \rightarrow 1$, c'est-à-dire $x^m - 1 \sim m \ln x$. Le quotient d'équivalents étant licite :

$$\frac{x^b - 1}{x^{a+b} - 1} \sim \frac{b \ln x}{(a+b) \ln x} = \frac{b}{a+b}$$

Comparaison des méthodes : la méthode 1 est purement algébrique et adaptée aux exposants entiers ; la méthode 2 repose sur l'équivalent $e^u - 1 \sim u$ et s'étendrait à des exposants réels quelconques.

Dans les deux cas, comme $x^a \rightarrow 1$:

Conclusion

$$\lim_{p \rightarrow \frac{1}{2}, p \neq \frac{1}{2}} P(E_a) = \frac{b}{a+b}, \text{ ce qui est exactement la valeur obtenue pour } p = q.$$

Question 2.c

Pour $0 \leq k \leq a+b$, notons F_k l'événement : « à partir d'un contenu de k boules dans l'urne A , l'expérience s'arrête parce que l'urne B est vide ». On a $P(F_0) = 0$ (l'urne A est vide dès le départ, l'expérience s'arrête par le vidage de A) et $P(F_{a+b}) = 1$ (l'urne B est vide dès le départ).

Méthode 1 — Même relation de récurrence

Le raisonnement de la question 2.a s'applique mot pour mot : pour $1 \leq k \leq a+b-1$, $P(F_k) = q P(F_{k-1}) + p P(F_{k+1})$. La partie 1 avec $U_0 = 0$ et $U_{a+b} = 1$ donne :

$$\text{si } p = q : P(F_k) = \frac{k}{a+b}, \text{ donc } P(F_a) = \frac{a}{a+b};$$

$$\text{si } p \neq q : P(F_k) = \frac{x^k - 1}{x^{a+b} - 1}, \text{ donc } P(F_a) = \frac{x^a - 1}{x^{a+b} - 1}.$$

Méthode 2 — Symétrie des rôles des urnes

L'expérience est inchangée si l'on échange les noms des urnes, à condition d'échanger aussi a et b , ainsi que p et q ; x est alors remplacé par $\frac{1}{x}$. Le vidage de B dans l'expérience initiale correspond au vidage de « A » dans l'expérience échangée. Si $p = q$, on obtient $\frac{a}{a+b}$. Si $p \neq q$, on obtient :

$$\frac{x^{-(a+b)} - x^{-b}}{x^{-(a+b)} - 1} = \frac{1 - x^a}{1 - x^{a+b}} = \frac{x^a - 1}{x^{a+b} - 1}$$

en multipliant numérateur et dénominateur par x^{a+b} .

Comparaison des méthodes : la méthode 1 est systématique et réutilise la partie 1 avec d'autres conditions aux bords ; la méthode 2, plus rapide, exploite la symétrie du modèle et fournit un contrôle du résultat.

Conclusion

la probabilité que l'expérience se termine par le vidage de B vaut $\frac{a}{a+b}$ si $p = q$, et $\frac{x^a - 1}{x^{a+b} - 1}$ si $p \neq q$.

Question 2.d

L'expérience s'arrête dès qu'une urne est vide ; comme il y a $a + b \geq 2$ boules au total, les deux urnes ne peuvent pas être vides simultanément. L'événement « l'expérience se termine » est donc la réunion des événements incompatibles E_a et F_a , et sa probabilité vaut $P(E_a) + P(F_a)$.

$$\text{Si } p = q : \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b} = 1.$$

$$\text{Si } p \neq q : \frac{x^{a+b} - x^a + x^a - 1}{x^{a+b} - 1} = 1.$$

Plus généralement, les formules obtenues en 2.b.i et 2.c pour un indice k quelconque montrent que $P(E_k) + P(F_k) = 1$ pour tout $k \in \{0, \dots, a+b\}$: quel que soit le contenu initial, l'expérience se termine presque sûrement.

Conclusion

l'expérience se termine avec probabilité 1 ; l'événement « l'expérience est sans fin » est négligeable.

Partie 3 — Préambule

Question adaptée au programme actuel : l'original posait $X_k = +\infty$ lorsque l'expérience est sans fin. Le programme ne considère que des variables aléatoires à valeurs réelles ; on pose donc par convention $X_k = 0$ sur cet événement, qui est négligeable d'après 2.d. Cette convention ne modifie ni les probabilités $P(X_k = j)$ pour $j \geq 1$, ni l'espérance.

Ainsi X_k est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $k \in \{0, a+b\}$, aucun tirage n'est nécessaire : $X_k = 0$ est certain.

Question 3.a

On conditionne à nouveau par le résultat du premier choix, puis on somme.

Loi. Soient $j \geq 1$ et $1 \leq k \leq a+b-1$. Comme en 2.a, le premier tirage a lieu. Sachant A , l'urne A contient $k-1$ boules après ce tirage et la suite de l'expérience se déroule comme une expérience partant de $k-1$ boules dans A : le nombre total de tirages vaut 1 plus le nombre de tirages de cette nouvelle expérience. Donc $P_A(X_k = j) = P(X_{k-1} = j-1)$.

Dans le cas $k-1 = 0$, l'expérience s'arrête après le premier tirage et $P_A(X_k = j)$ vaut 1 si $j = 1$ et 0 sinon, ce qui coïncide avec $P(X_0 = j-1)$ puisque $X_0 = 0$. De même

$P_A(X_k = j) = P(X_{k+1} = j-1)$. La formule des probabilités totales donne :

$$P(X_k = j) = q P(X_{k-1} = j-1) + p P(X_{k+1} = j-1)$$

Espérance. Les variables X_{k-1}, X_k, X_{k+1} sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ et admettent une

espérance (admis), donc les séries

$$\sum_i iP(X_{k\pm 1} = i)$$

convergent; de plus

$$\sum_{i=0}^{+\infty} P(X_{k\pm 1} = i) = 1.$$

Pour $M \geq 1$, la relation précédente et le changement d'indice $i = j - 1$ donnent :

$$\sum_{j=1}^M j P(X_k = j) = q \sum_{i=0}^{M-1} (i+1) P(X_{k-1} = i) + p \sum_{i=0}^{M-1} (i+1) P(X_{k+1} = i)$$

Quand $M \rightarrow +\infty$, le membre de gauche tend vers $E(X_k)$ (le terme $j = 0$ est nul), et

$$\sum_{i=0}^{M-1} (i+1) P(X_{k\pm 1} = i)$$

tend vers $E(X_{k\pm 1}) + 1$. Donc :

$$E(X_k) = q(E(X_{k-1}) + 1) + p(E(X_{k+1}) + 1)$$

Conclusion

comme $p+q = 1$, $E(X_k) = 1 + q E(X_{k-1}) + p E(X_{k+1})$ pour tout $k \in \{1, \dots, a+b-1\}$.

Question 3.b.i

Énoncé rectifié : la relation est demandée pour $1 \leq k \leq a+b-1$ (l'original indique $k \geq 1$), seuls indices pour lesquels la relation de 3.a est établie.

Soit $\gamma \in \mathbb{R}$. La variable $Y_k = X_k + \gamma k^2$ est la somme de X_k et d'une constante : elle admet une espérance et $E(Y_k) = E(X_k) + \gamma k^2$ par linéarité.

Pour $p = q = \frac{1}{2}$, la question 3.a donne $\frac{1}{2}E(X_{k+1}) + \frac{1}{2}E(X_{k-1}) = E(X_k) - 1$ pour $1 \leq k \leq a + b - 1$. Comme $(k+1)^2 + (k-1)^2 = 2k^2 + 2$:

$$\frac{1}{2}E(Y_{k+1}) + \frac{1}{2}E(Y_{k-1}) = E(X_k) - 1 + \gamma(k^2 + 1) = E(Y_k) + \gamma - 1$$

La relation demandée est donc vérifiée pour tout $k \in \{1, \dots, a + b - 1\}$ si et seulement si $\gamma = 1$.

Conclusion

le réel $\gamma = 1$ convient : $Y_k = X_k + k^2$ vérifie $E(Y_k) = \frac{1}{2}E(Y_{k+1}) + \frac{1}{2}E(Y_{k-1})$ pour $1 \leq k \leq a + b - 1$.

Question 3.b.ii

La famille $U_k = E(Y_k)$, $0 \leq k \leq a + b$, vérifie la relation de la partie 1 avec $p = q = \frac{1}{2}$, et :

$$U_0 = E(X_0) + 0 = 0, \quad U_{a+b} = E(X_{a+b}) + (a+b)^2 = (a+b)^2$$

D'après 1.b, $U_k = 0 + \frac{k}{a+b}(a+b)^2 = k(a+b)$. Donc $E(X_k) = E(Y_k) - k^2 = k(a+b-k)$ pour $0 \leq k \leq a+b$.

Conclusion

pour $k = a$, $E(X_a) = a(a+b-a) = ab$.

Question 3.c.i

Énoncé rectifié : comme en 3.b.i, la relation est demandée pour $1 \leq k \leq a + b - 1$.

Soit $\delta \in \mathbb{R}$ et $Z_k = X_k + \delta k$; par linéarité, Z_k admet une espérance et $E(Z_k) = E(X_k) + \delta k$. D'après 3.a, $pE(X_{k+1}) + qE(X_{k-1}) = E(X_k) - 1$, et $p(k+1) + q(k-1) = k + p - q$. Donc, pour $1 \leq k \leq a+b-1$:

$$pE(Z_{k+1}) + qE(Z_{k-1}) = E(X_k) - 1 + \delta(k + p - q) = E(Z_k) + \delta(p - q) - 1$$

La relation demandée équivaut donc à $\delta(p - q) = 1$. Comme $p \neq q$, elle est satisfaite pour $\delta = \frac{1}{p - q}$.

Conclusion

le réel $\delta = \frac{1}{p - q}$ convient.

Question 3.c.ii

La famille $U_k = E(Z_k)$, $0 \leq k \leq a+b$, vérifie la relation de la partie 1 avec :

$$U_0 = E(X_0) = 0, \quad U_{a+b} = E(X_{a+b}) + \frac{a+b}{p-q} = \frac{a+b}{p-q}$$

D'après 1.c, pour $0 \leq k \leq a+b$:

$$E(Z_k) = \frac{a+b}{p-q} \cdot \frac{x^k - 1}{x^{a+b} - 1}$$

d'où $E(X_k) = E(Z_k) - \frac{k}{p-q}$.

Conclusion

$$\text{pour } k = a, \quad E(X_a) = \frac{1}{p-q} \left(\frac{(a+b)(x^a-1)}{x^{a+b}-1} - a \right).$$

Contrôle : pour $a = b = 1$, on doit avoir $E(X_1) = 1$ (le premier tirage vide toujours une urne). La formule donne $\frac{1}{p-q} \left(\frac{2}{x+1} - 1 \right) = \frac{1-x}{(p-q)(1+x)}$; or $1-x = \frac{p-q}{p}$ et $1+x = \frac{1}{p}$, d'où la valeur 1.

Question 3.c.iii

Si $p < q$, alors $x > 1$. Pour a fixé, $x^a - 1$ est une constante, et quand $b \rightarrow +\infty$, $x^{a+b} \rightarrow +\infty$, donc $x^{a+b} - 1 \sim x^{a+b}$. Par croissances comparées (puissance contre exponentielle de base $x > 1$), $\frac{a+b}{x^{a+b}} \rightarrow 0$ quand $b \rightarrow +\infty$, donc :

$$\frac{(a+b)(x^a-1)}{x^{a+b}-1} \rightarrow 0$$

Conclusion

dans le cas $p < q$, $\lim_{b \rightarrow +\infty} E(X_a) = \frac{-a}{p-q} = \frac{a}{q-p}$. Interprétation : l'urne A perd en moyenne $q-p$ boule par tirage, et il faut en moyenne $\frac{a}{q-p}$ tirages pour la vider lorsque l'urne B est très remplie.

Relevé des adaptations

- Problème, partie 1 (préambule et question 1.c) : la relation de récurrence, donnée pour tout $n \in \mathbb{N}$ non nul, est imposée pour $1 \leq n \leq a+b-1$, et l'égalité $U_n = \alpha + \beta x^n$ est demandée pour $0 \leq n \leq a+b$. Justification : U_0 et U_{a+b} sont donnés et la suite n'est utilisée que pour ces indices dans les parties 2 et 3; la rectification rend l'énoncé cohérent sans changer les résultats.
- Problème, partie 3 (préambule) : la convention $X_k = +\infty$ pour une expérience sans fin est remplacée par $X_k = 0$ sur cet événement négligeable. Justification : le

programme ne traite que de variables aléatoires réelles; la loi sur $\mathbb{N}$ non nul et l'espérance sont inchangées.

- Problème, questions 3.b.i et 3.c.i : les relations demandées « pour tout $k \geq 1$ » le sont pour $1 \leq k \leq a + b - 1$. Justification : X_k n'est défini que pour $0 \leq k \leq a + b$ et la relation de 3.a n'est valable que pour ces indices.
- Problème, questions 3.b.i et 3.c.i : les réels cherchés, dont la lettre grecque est illisible dans le PDF, sont notés γ et δ pour ne pas entrer en conflit avec les constantes α et β de la partie 1.