



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

1993

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

EXERCICE 1

n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

1. Soit $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$, continue et décroissante, et telle que $\int_0^1 f(x) dx$ soit convergente.

On pose pour tout entier $n \geq 1$:

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

(a) i. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, montrer que $\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x) dx$.

ii. Pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$, montrer que $\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

iii. En déduire que :

$$\frac{f(1)}{n} + \int_{1/n}^1 f(x) dx \leq S_n \leq \int_0^1 f(x) dx$$

(b) En déduire la limite de S_n quand $n \rightarrow +\infty$.

2. (a) Justifier l'existence et calculer la valeur de $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(u)}{u^{3/2}} du$.

(b) À l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{x}$, montrer que $I = - \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.

3. Soit

$$P_n = \prod_{k=1}^n \left(\frac{n}{k}\right)^{1/\sqrt{kn}}.$$

- (a) Écrire une fonction Python qui, pour n donné, calcule et affiche P_n .
- (b) Donner les valeurs de P_n pour $n \in \{20, 50, 100\}$.
- (c) À l'aide du 1, déterminer la limite de P_n quand $n \rightarrow +\infty$. La convergence est-elle rapide?

EXERCICE 2

N.B. On pourra utiliser le fait qu'une matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

est inversible si et seulement si $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Si

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),$$

on note :

$$\phi(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$$

1. (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que λ est valeur propre de $\phi(A)$ si et seulement si

$$(a - \lambda^2)(d - \lambda^2) - bc = 0$$

- (b) En déduire l'équivalence suivante :

λ est valeur propre de $\phi(A) \iff \lambda^2$ est valeur propre de A .

- (c) Exemple : si $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, quelles sont les valeurs propres de $\phi(A)$? La matrice $\phi(A)$ est-elle diagonalisable ?

2. On suppose maintenant que $a = 1$ et $b = 0$.

- (a) Pour λ fixé dans $\mathbb{R}$, on note $V(\lambda)$ l'ensemble des vecteurs (x, y, z, t) de $\mathbb{R}^4$ tels que

$$\phi(A) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

- i. Déterminer $V(1)$ et $V(-1)$, ainsi que leurs dimensions, dans le cas où $d \neq 1$ ou $c \neq 0$.

- ii. Même question si $d = 1$ et $c = 0$.

- (b) Établir l'équivalence suivante : $\phi(A)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ si et seulement si

$$(d = 1 \text{ et } c = 0) \quad \text{ou} \quad (d > 0 \text{ et } d \neq 1)$$

- (c) Déterminer la probabilité pour que $\phi(A)$ ait quatre valeurs propres réelles distinctes dans chacun des deux cas suivants :
- i. c et d sont des entiers choisis au hasard et indépendamment l'un de l'autre dans $[-5, 3]$.
 - ii. c et d sont des réels choisis au hasard et indépendamment l'un de l'autre dans $[-5, 3]$.
- (d) Déterminer la probabilité pour que $\phi(A)$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dans chacun des cas 2(c)i et 2(c)ii.

PROBLÈME

Un jeu réunit une infinité de joueurs $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$

- D'abord A_1, A_2, A_3 disputent ensemble un tournoi qui les classe (sans ex-aequo), les différents classements possibles étant équiprobables. Le joueur classé dernier est éliminé.
- Les deux autres et A_4 disputent un deuxième tournoi analogue (indépendamment du premier) qui classe ces trois joueurs. Le joueur classé dernier est éliminé.
- Il peut se faire qu'un même joueur arrive premier à ces deux tournois : dans ce cas, il est déclaré gagnant du jeu, et le jeu s'arrête.
- Sinon, les joueurs restant après le deuxième tournoi disputent avec A_5 un troisième tournoi analogue (indépendant des deux premiers), etc.
- À chaque tournoi, le joueur classé dernier est éliminé, et les deux autres rencontrent le suivant.
- Est décrété gagnant du jeu le premier joueur qui se trouve classé premier à deux tournois successifs (et alors le jeu s'arrête).

- Pour n entier supérieur ou égal à 2, on note G_n l'événement : « A_1 est gagnant du jeu au n -ième tournoi ».
- Enfin, soit X la variable aléatoire égale au nombre de tournois disputés (pour déterminer le gagnant).

L'objet du problème est d'étudier la variable aléatoire X et de calculer la probabilité pour que le joueur A_1 gagne.

Le problème est composé de deux parties largement indépendantes.

Première partie : loi de X et probabilité de G_n pour $n \in \{2, 3, 4, 7\}$

A)

1. Calculer $P(G_2)$, c'est-à-dire la probabilité pour que le joueur A_1 remporte les deux premiers tournois (et gagne alors le jeu). Que vaut $P(X = 2)$?

2. Pour tout entier $k \geq 4$, on note J_k l'événement : « A_k joue ».

(a) Montrer que $P(J_5) = \frac{2}{3}$. Pour $i \geq 4$, que vaut $P_{J_i}(J_{i+1})$?

(b) En déduire que $P(J_k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-4}$.

3. (a) Pour tout entier $n \geq 2$, comparer les événements $(X \geq n)$ et J_{n+2} .

(b) En déduire la valeur de $P(X = n)$.

(c) Vérifier que l'on a bien :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} P(X = n) = 1.$$

4. Quelle est la loi suivie par $X - 1$? En déduire l'espérance et la variance de X .

B) Pour tout couple (i, j) d'entiers naturels non nuls, on considère les événements P_i et S_j suivants :

P_i : « A_1 est classé premier au i -ième tournoi » ;

S_j : « A_1 est classé second au j -ième tournoi et le jeu continue ».

1. Exprimer G_3 et G_4 à l'aide de ces événements.

2. (a) Calculer $P(G_3)$.

(b) Montrer que $P_{S_1}(S_2) = \frac{1}{6}$ et que $P_{P_1}(S_2) = \frac{1}{3}$. Prouver que $P(G_4) = \frac{1}{54}$.

3. (a) Écrire les suites des classements de A_1 (au cours des 7 premiers tournois) favorables à l'événement G_7 (on vérifiera qu'il y en a huit).

(b) Calculer $P(G_7)$.

Deuxième partie : probabilité pour que le joueur A_1 gagne

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, n\}$, soit $\mathcal{U}_n^k$ l'ensemble des n -listes de $\{1, 2\}$ qui vérifient les trois conditions suivantes :

a) elles finissent par 2 ;

b) elles ne contiennent jamais deux « 1 » consécutifs ;

c) k fois (exactement) un « 2 » est suivi d'un autre « 2 ».

Exemples : la suite $(1, 2, 2, 1, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 2)$ appartient à $\mathcal{U}_{11}^3$; $(1, 2, 2, 2) \in \mathcal{U}_4^2$;

$(2, 1, 2, 2) \in \mathcal{U}_4^1$; $(2, 2, 1, 2, 2) \in \mathcal{U}_5^2$; $(1, 2, 2, 2, 2) \in \mathcal{U}_5^3$.

On pose $u_n^k = \text{Card } \mathcal{U}_n^k$, avec la convention : $u_0^0 = 1$.

1. Calcul de u_n^k

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathcal{U}_n^0, \mathcal{U}_n^n, \mathcal{U}_{n+1}^n, \mathcal{U}_{n+2}^n$. En déduire que $u_n^0 = 1, u_n^n = 0, u_{n+1}^n = 1, u_{n+2}^n = 1$.

(b) En classant les n -listes de $\mathcal{U}_n^k$ suivant la valeur de leur $(n-1)$ -ième élément, montrer que, pour $n \geq 3$ et $k \in \{1, \dots, n-2\}$:

$$u_n^k = u_{n-2}^k + u_{n-1}^{k-1}$$

(c) Pour $i \in \mathbb{N}$ et $j \in \{0, \dots, i\}$, on pose $\gamma_i^j = u_{2i+1-j}^j$ et $\delta_i^j = u_{2i+2-j}^j$.

i. Calculer γ_i^0 et γ_i^i ; pour $i \geq 2$ et $j \in \{1, \dots, i-1\}$, exprimer $\gamma_{i-1}^{j-1} + \gamma_{i-1}^j$ en fonction de γ_i^j . En déduire la valeur de γ_i^j .

ii. Procéder de la même façon qu'au 1(c)i pour obtenir δ_i^j .

iii. En déduire que :

$$\forall (k, p) \in \mathbb{N}^2, \quad u_{k+2p+1}^k = u_{k+2p+2}^k = \binom{k+p}{p}$$

2. Deux séries

Soient $k \in \mathbb{N}$, $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ et $f : [0, x] \rightarrow \mathbb{R}$, $u \mapsto \frac{1}{(1-u)^{k+1}}$.

(a) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, calculer $f^{(p)}(u)$.

(b) À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \frac{1}{(1-x)^{k+1}} - \sum_{p=0}^{n-1} \binom{k+p}{k} x^p \right| \leq \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \binom{k+n}{k} \left(\frac{x}{1-x} \right)^n$$

(c) En déduire que :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \binom{k+p}{k} x^p = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

(d) Calculer

$$\alpha_k = \sum_{p=0}^{+\infty} u_{k+2p+1}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{k+2p+3}$$

et

$$\alpha'_k = \sum_{p=0}^{+\infty} u_{k+2p+2}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{k+2p+4}.$$

3. Probabilité pour que A_1 gagne : on note p_1 cette probabilité.

(a) Montrer que, pour tout $n \geq 2$:

$$P(G_n) = \sum_{k=0}^{n-2} u_{n-2}^k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}$$

(il est conseillé, pour traiter cette question, d'avoir auparavant compris le calcul de $P(G_7)$ effectué à la fin de la première partie).

(b) On admet le résultat suivant de permutation des sommes : si $(a_{n,k})$, pour $n \geq 2$ et $k \in \{0, \dots, n-2\}$, est une famille de réels positifs ou nuls telle que la série

$$\sum_{n \geq 2} \left(\sum_{k=0}^{n-2} a_{n,k} \right)$$

converge, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série

$$\sum_{n \geq k+2} a_{n,k}$$

converge, la série

$$\sum_{k \geq 0} \left(\sum_{n=k+2}^{+\infty} a_{n,k} \right)$$

converge, et :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-2} a_{n,k} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=k+2}^{+\infty} a_{n,k} \right)$$

À l'aide de ce résultat, montrer que :

$$p_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k \beta_k \quad \text{avec} \quad \beta_k = \sum_{n=k+2}^{+\infty} u_{n-2}^k \left(\frac{1}{3} \right)^n$$

(c) Calculer β_0 .

(d) Pour $k \geq 1$, montrer que $\beta_k = \frac{4}{27} \left(\frac{3}{8} \right)^{k+1}$.

(e) En déduire enfin la valeur de p_1 .