



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

1992

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

Notations :

- a est un réel fixé.
- $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- On note ϕ l'application qui, à tout élément f de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, fait correspondre la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{x-a} \int_x^{2x-a} f(t) dt & \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\} \\ g(a) = f(a) \end{cases}$$

- 1 - a. Vérifier que ϕ définit un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.
- 1 - b. Justifier la dérivabilité de g sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ et calculer $g'(x)$ pour $x \neq a$.
- 1 - c. On prend $f : t \mapsto |t - a|$; l'application g correspondante est-elle dérivable en a ?
- 1 - d. ϕ est-il un endomorphisme surjectif?
- 2 - a. Soit $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = 2u(2x - a)$.
- 2 - a. i. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u\left(\frac{(2^n - 1)a + x}{2^n}\right) = 2^n u(x)$.
- 2 - a. ii. En déduire que u est l'application nulle.
- 2 - b. Déterminer le noyau de ϕ .
- 3 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

Pour tout entier k compris entre 0 et n , on définit d_k par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, d_k(x) = (x - a)^k \quad (d_0(x) = 1).$$

3 - a. Déterminer $\phi(d_k)$.

3 - b. On note ϕ_n la restriction de ϕ à $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que ϕ_n est un automorphisme diagonalisable.

4 - Soit $n \in \mathbb{N}$.

4 - a. c_n désigne l'application $x \mapsto x^n$. Écrire c_n comme combinaison linéaire de $d_0, d_1, \dots, d_n$.

4 - b. Déterminer les applications f de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_x^{2x-a} f(t) dt = (x - a)x^n$$

Exercice 2

a désigne un réel de $]0, 1[$.

Un signal lumineux se déplace entre trois points A , B et C .

S'il est en A , la probabilité qu'il se déplace en B est égale à a et celle qu'il se déplace en C est $1 - a$.

S'il est en B , la probabilité qu'il aille en A est égale à a et celle qu'il aille en C est $1 - a$.

Enfin, s'il est en C , la probabilité qu'il aille en A est égale à a et celle qu'il aille en B est $1 - a$.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n (respectivement B_n et C_n) l'événement : « le signal est en A (respectivement en B et en C) après le n -ième déplacement ».

Si $n = 0$, on note A_0 (respectivement B_0 et C_0) l'événement : « le signal est en A (respectivement en B et en C) avant le premier déplacement ».

Enfin, pour tout entier n , on note $X_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix}$.

1 - Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = MX_n$ où $M = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & 1-a \\ 1-a & 1-a & 0 \end{pmatrix}$.

On pose $N = {}^tM$.

2 - a. Vérifier que le vecteur $u = (1, 1, 1)$ est un vecteur propre de N . À quelle valeur propre est-il associé ?

2 - b. Déterminer les autres valeurs propres de N , et suivant les valeurs de a les sous-espaces propres associés.

2 - c. N est-elle diagonalisable ?

3 - Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a-1 \\ 1 & -a & a-1 \\ 1 & -a & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} (on fera apparaître les calculs).

Dans la suite de l'exercice, on fixe $a = \frac{1}{4}$.

4 - a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, N^n = PD^nP^{-1}$ où D est une matrice diagonale à préciser.

4 - b. Calculer alors N^n pour tout entier n .

4 - c. En déduire la valeur de M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

5 - On suppose qu'avant le premier déplacement, le signal est en A .

5 - a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $P(A_n), P(B_n), P(C_n)$ en fonction de n .

5 - b. Déterminer alors les limites de ces suites lorsque n tend vers $+\infty$.

Problème

Dans tout ce problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et β un réel strictement positif.

Dans un rayon de magasin, il y a n articles $a_1, a_2, \dots, a_n$, valant respectivement $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ francs.

Un client se présente et achète un nombre aléatoire A d'articles distincts de ce rayon ($0 \leq A \leq n$).

On suppose que, lorsqu'un client s'est décidé pour l'achat de A articles, les différents choix possibles de ces A articles sont équiprobables.

- On note S la somme payée par le client pour l'achat de ces A articles et, pour $1 \leq i \leq n$, X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le client achète l'article a_i et 0 sinon.
- L'objet de ce problème est principalement d'évaluer l'espérance et la variance de S , suivant deux hypothèses différentes sur A .
- Les deux parties du problème sont largement indépendantes ; seuls les résultats des questions A et E1 de la première partie sont utilisés dans la deuxième.

Partie I

A - 1. Pour $0 \leq k \leq n$, calculer la probabilité conditionnelle $P((X_i = 1) / (A = k))$.

A - 2. i et j désignant deux entiers distincts compris entre 1 et n , calculer $P(((X_i = 1) \cap (X_j = 1)) / (A = k))$.

A - 3. Comment s'exprime S en fonction des variables aléatoires X_i et des réels α_i ?

On fait dans cette première partie l'hypothèse suivante :

(H') A suit la loi uniforme sur $\{0, \dots, n\}$.

B - Calculer $P(X_i = 1)$ à l'aide de la formule des probabilités totales.

C - Calculer l'espérance $E(S)$ de S en fonction des réels α_i .

D - i et j désignent deux entiers distincts compris entre 1 et n .

D - 1. Calculer $P((X_i = 1) \cap (X_j = 1))$.

D - 2. Calculer la covariance et le coefficient de corrélation linéaire du couple (X_i, X_j) .

Les variables aléatoires X_i et X_j sont-elles indépendantes ?

D - 3. Exprimer la variance $V(S)$ de S en fonction de

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right)^2$$

et

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_i)^2.$$

D - 4. On suppose dans cette question uniquement que $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \alpha_i = i$.

Vérifier que $V(S) = \frac{n(n+1)}{144}(3n^2 + 11n + 4)$.

E - On suppose maintenant, plus généralement, que $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \alpha_i = i^\beta$.

E - 1. Déterminer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} \right)^\beta.$$

En déduire un équivalent, quand n tend vers $+\infty$, de

$$\sum_{i=1}^n i^\beta,$$

puis de $E(S)$.

E - 2. Donner un équivalent, de la forme γn^δ , de la variance $V(S)$ quand n tend vers $+\infty$ (γ et δ sont des constantes réelles que l'on déterminera).

Partie II

a désigne un réel appartenant à $]0, 1[$. On fait dans cette deuxième partie l'hypothèse suivante :

(H'') La loi de A est définie par : $P(A = 0) = a$, et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall k \in \{1, \dots, n\}, P(A = k) = \frac{\lambda}{k}$.

A - Déterminer λ .

B - Étude du cas particulier : $n = 3, \quad a = \frac{1}{12}, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$ et $\alpha_3 = 3$.

Déterminer les lois de A et de S , et calculer $E(S)$ et $V(S)$.

On reprend maintenant l'étude du cas général.

C - Calculer $P(X_i = 1)$.

D - i et j désignent encore deux entiers distincts compris entre 1 et n .

D - 1. Calculer $P((X_i = 1) \cap (X_j = 1))$.

D - 2. Quelle relation doit-il exister entre a et n pour que les variables aléatoires X_i et X_j soient indépendantes ?

D - 3. Calculer la covariance du couple (X_i, X_j) .

E - Exprimer $E(S)$ et $V(S)$ en fonction de λ ,

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i$$

et

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_i)^2.$$

F - On suppose dans cette question que $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \alpha_i = i^\beta$.

F - 1. Écrire en Python une fonction `esperance_variance(n, a, beta)` qui, à partir de n , a et β , calcule et renvoie $E(S)$ et $V(S)$.

Donner les résultats numériques pour :

a. $n = 10; a = 0,1; \beta = 1,5$.

b. $n = 20; a = 0,5; \beta = 1,2$.

F - 2. On pose, pour $n \geq 1$,

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln(n)$$

et, pour $n \geq 2$, $v_n = u_n - u_{n-1}$.

F - 2. a. Déterminer un équivalent de v_n quand n tend vers $+\infty$; quelle est la nature de la série de terme général v_n ?

F - 2. b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Montrer alors que $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

F - 3. Donner un équivalent de $E(S)$ quand n tend vers $+\infty$.

F - 4. Donner un équivalent de $V(S)$ quand n tend vers $+\infty$.

G - Comparaison des hypothèses (H') et (H'') .

G - 1. Quelle est l'hypothèse la plus vraisemblable?

G - 2. Quelle est l'hypothèse la plus avantageuse en moyenne pour le vendeur? (On discutera suivant les valeurs de n et de a .)