



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

Ecricome

Mathématiques

1990

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé — ECRICOME 1990, mathématiques, version adaptée au programme ECG de mathématiques approfondies

EXERCICE 1

Notations communes. On rappelle les intégrales suivantes, obtenues par intégration par parties sur le segment $[0, 1]$ (les fonctions en jeu sont de classe C^1 sur $[0, 1]$).

$$\int_0^1 e^t dt = e - 1.$$

En posant $u(t) = t, v(t) = e^t$:

$$\int_0^1 t e^t dt = [t e^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt = e - (e - 1) = 1.$$

En posant $u(t) = t^2, v(t) = e^t$:

$$\int_0^1 t^2 e^t dt = [t^2 e^t]_0^1 - 2 \int_0^1 t e^t dt = e - 2.$$

Question 1.(a)

Il s'agit de trouver $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que l'égalité soit vraie pour tout $P \in E_2$. Les deux membres sont linéaires en P : l'application $P \mapsto \int_0^1 P(t) e^t dt$ est linéaire par linéarité de l'intégrale, et $P \mapsto \lambda_0 P(0) + \lambda_1 P\left(\frac{1}{2}\right) + \lambda_2 P(1)$ l'est aussi. Deux applications linéaires coïncident sur E_2 si et seulement si elles coïncident sur une base de E_2 .

Méthode 1 — Utilisation de la base canonique $(1, t, t^2)$.

L'égalité est vraie pour tout $P \in E_2$ si et seulement si elle est vraie pour $P = 1, P = t$ et $P = t^2$, c'est-à-dire, d'après les intégrales rappelées :

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = e - 1, \quad \frac{1}{2}\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad \frac{1}{4}\lambda_1 + \lambda_2 = e - 2.$$

En soustrayant la troisième équation à la deuxième : $\frac{1}{4}\lambda_1 = 1 - (e - 2) = 3 - e$, donc $\lambda_1 = 12 - 4e$.

Puis $\lambda_2 = 1 - \frac{1}{2}\lambda_1 = 1 - 6 + 2e = 2e - 5$.

Enfin $\lambda_0 = e - 1 - \lambda_1 - \lambda_2 = e - 1 - 12 + 4e - 2e + 5 = 3e - 8$.

Le système, résolu par équivalences, admet une unique solution.

Méthode 2 — Utilisation de la base de Lagrange associée aux points $0, \frac{1}{2}, 1$.

On pose :

$$\begin{aligned} L_0(t) &= 2\left(t - \frac{1}{2}\right)(t - 1) = 2t^2 - 3t + 1, & L_1(t) &= 4t(1 - t) = -4t^2 + 4t, & L_2(t) \\ &= 2t\left(t - \frac{1}{2}\right) = 2t^2 - t. \end{aligned}$$

Ces trois polynômes sont dans E_2 et vérifient $L_k(x_j) = 1$ si $j = k$ et 0 sinon, où $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$. La famille (L_0, L_1, L_2) est libre : si $aL_0 + bL_1 + cL_2 = 0$, l'évaluation en $0, \frac{1}{2}, 1$ donne $a = b = c = 0$. C'est donc une famille libre de trois vecteurs dans E_2 , qui est de dimension 3 : c'est une base de E_2 .

Analyse : si les λ_k conviennent, en appliquant l'égalité à $P = L_k$, on obtient

$$\lambda_k = \int_0^1 L_k(t)e^t dt.$$

Calcul :

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 2(e - 2) - 3 \cdot 1 + (e - 1) = 3e - 8, & \lambda_1 &= -4(e - 2) + 4 \cdot 1 = 12 - 4e, & \lambda_2 \\ &= 2(e - 2) - 1 = 2e - 5. \end{aligned}$$

Synthèse : avec ces valeurs, l'égalité est vraie pour $P = L_0, L_1, L_2$, donc pour tout $P \in E_2$ par linéarité.

Comparaison des méthodes : la première conduit à un système linéaire, la seconde donne directement chaque λ_k comme l'intégrale d'un polynôme de Lagrange ; elle est préférable lorsque le nombre de points augmente, car elle évite toute résolution de système.

Conclusion

$\lambda_0 = 3e - 8$, $\lambda_1 = 12 - 4e$, $\lambda_2 = 2e - 5$ (soit environ 0,1548 ; 1,1269 ; 0,4366). On vérifie que $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = e - 1$.

Question 1.(b)

On cherche $P_\theta \in E_2$ telle que $P_\theta(0) = \ln 1 = 0$, $P_\theta\left(\frac{1}{2}\right) = \ln \frac{3}{2}$ et $P_\theta(1) = \ln 2$.

Méthode 1 — Système sur les coefficients.

On écrit $P(t) = at^2 + bt + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$; tout élément de E_2 s'écrit ainsi de manière unique. Les conditions s'écrivent :

$$c = 0, \quad \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b = \ln \frac{3}{2}, \quad a + b = \ln 2.$$

En multipliant la deuxième équation par 4 : $a + 2b = 4 \ln \frac{3}{2}$. En lui retranchant la troisième : $b = 4 \ln \frac{3}{2} - \ln 2 = 4 \ln 3 - 5 \ln 2$. Puis $a = \ln 2 - b = 6 \ln 2 - 4 \ln 3$.

Le système admet une unique solution, donc il existe une unique fonction P_θ convenable.

Méthode 2 — Interpolation de Lagrange.

L'application $u : E_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $P \mapsto \left(P(0), P\left(\frac{1}{2}\right), P(1)\right)$ est linéaire. Elle est injective : si $u(P) = 0$, le polynôme P , de degré au plus 2, possède trois racines distinctes, donc

$P = 0$. Comme $\dim E_2 = \dim \mathbb{R}^3 = 3$, le théorème du rang montre que u est bijective : il existe un unique $P_\theta \in E_2$ tel que $u(P_\theta) = \left(0, \ln \frac{3}{2}, \ln 2\right)$. Avec les polynômes L_0, L_1, L_2 de la question 1.(a), il s'agit de :

$$P_\theta = 0 \cdot L_0 + \ln \frac{3}{2} L_1 + \ln 2 L_2,$$

qui convient puisque $L_k(x_j)$ vaut 1 si $j = k$ et 0 sinon. En développant :

$$P_\theta(t) = 4 \ln \frac{3}{2} (t - t^2) + \ln 2 (2t^2 - t) = (6 \ln 2 - 4 \ln 3) t^2 + (4 \ln 3 - 5 \ln 2) t.$$

La seconde méthode sépare clairement l'existence et l'unicité (argument de dimension) du calcul explicite.

Conclusion

$$P_\theta(t) = (6 \ln 2 - 4 \ln 3) t^2 + (4 \ln 3 - 5 \ln 2) t \text{ pour tout } t \in [0, 1].$$

Question 1.(c)

Méthode 1 — Utilisation de 1.(a).

Comme $P_\theta \in E_2$, la formule de 1.(a) s'applique :

$$I^* = \lambda_0 P_\theta(0) + \lambda_1 P_\theta\left(\frac{1}{2}\right) + \lambda_2 P_\theta(1) = (12 - 4e) \ln \frac{3}{2} + (2e - 5) \ln 2.$$

Donc $I^* = (12 - 4e) \ln 3 + (-12 + 4e + 2e - 5) \ln 2 = (12 - 4e) \ln 3 + (6e - 17) \ln 2$.

Méthode 2 — Calcul direct.

Par linéarité de l'intégrale et avec les intégrales rappelées :

$$I^* = (6 \ln 2 - 4 \ln 3) \int_0^1 t^2 e^t dt + (4 \ln 3 - 5 \ln 2) \int_0^1 t e^t dt = (6 \ln 2 - 4 \ln 3)(e - 2) + 4 \ln 3 - 5 \ln 2.$$

En regroupant : $I^* = (6e - 12 - 5) \ln 2 + (-4e + 8 + 4) \ln 3 = (6e - 17) \ln 2 + (12 - 4e) \ln 3$.

La première méthode illustre l'intérêt de la formule de quadrature de 1.(a) : il suffit de connaître les valeurs de θ aux trois points.

Conclusion

$$I^* = (12 - 4e) \ln 3 + (6e - 17) \ln 2 \approx 0,7595.$$

Question 2

Étape 1 : zéros de δ_α .

Comme $\alpha \in]0, 1[$ et $\alpha \neq \frac{1}{2}$, on a $\alpha \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) (\alpha - 1) \neq 0$: δ_α est bien définie sur $[0, 1]$.

Pour $t \in \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1 \right\}$: $\ln(1+t) - P_\theta(t) = 0$ par définition de P_θ , et $t \left(t - \frac{1}{2} \right) (t - 1) = 0$, donc $\delta_\alpha(t) = 0$.

Pour $t = \alpha$: la fraction vaut 1, donc

$$\delta_\alpha(\alpha) = \ln(1+\alpha) - P_\theta(\alpha) - [\ln(1+\alpha) - P_\theta(\alpha)] = 0.$$

Ainsi δ_α s'annule en 0, $\frac{1}{2}$, 1 et α , quatre points distincts de $[0, 1]$.

Étape 2 : application répétée du théorème de Rolle.

La fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ est de classe C^∞ sur $] -1, +\infty[$, et P_θ et Δ sont polynomiales ; donc δ_α est de classe C^∞ sur $[0, 1]$.

Notons $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ les quatre zéros précédents rangés dans l'ordre croissant ($a_1 = 0, a_4 = 1$). Sur chaque segment $[a_k, a_{k+1}]$, δ_α est continue, dérivable sur $]a_k, a_{k+1}[$, et $\delta_\alpha(a_k) = \delta_\alpha(a_{k+1})$; le théorème de Rolle fournit $b_k \in]a_k, a_{k+1}[$ tel que $\delta'_\alpha(b_k) = 0$, pour $k = 1, 2, 3$, avec $b_1 < b_2 < b_3$.

On applique de même le théorème de Rolle à δ'_α sur $[b_1, b_2]$ et $[b_2, b_3]$: on obtient $d_1 < d_2$ tels que $\delta''_\alpha(d_1) = \delta''_\alpha(d_2) = 0$. Enfin, le théorème de Rolle appliqué à δ''_α sur $[d_1, d_2]$ donne $c \in]d_1, d_2[\subset]0, 1[$ tel que $\delta^{(3)}_\alpha(c) = 0$.

Étape 3 : calcul de $\delta^{(3)}_\alpha$.

$$\text{Pour } t \in [0, 1] : \quad (\ln(1+t))' = \frac{1}{1+t}, \quad (\ln(1+t))'' = -\frac{1}{(1+t)^2},$$

$$(\ln(1+t))^{(3)} = \frac{2}{(1+t)^3}.$$

P_θ est de degré au plus 2, donc $P^{(3)}_\theta = 0$.

$$\Delta(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t, \text{ donc } \Delta^{(3)}(t) = 6.$$

En notant $K = \frac{\ln(1+\alpha) - P_\theta(\alpha)}{\alpha \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) (\alpha - 1)}$, on a $\delta_\alpha(t) = \ln(1+t) - P_\theta(t) - K \Delta(t)$, d'où :

$$\delta^{(3)}_\alpha(t) = \frac{2}{(1+t)^3} - 6K.$$

La condition $\delta^{(3)}_\alpha(c) = 0$ donne $K = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{(1+c)^3}$, c'est-à-dire :

$$\ln(1+\alpha) - P_\theta(\alpha) = \frac{\alpha \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) (\alpha - 1)}{6} \cdot \frac{2}{(1+c)^3}.$$

Étape 4 : variations de Δ sur $[0, 1]$.

Δ est dérivable et $\Delta'(t) = 3t^2 - 3t + \frac{1}{2}$. Ce trinôme a pour discriminant $9 - 6 = 3 > 0$

et pour racines $t_1 = \frac{3 - \sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$ et $t_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$, qui appartiennent à $]0, 1[$

car $0 < \frac{\sqrt{3}}{6} < \frac{1}{2}$. Le coefficient dominant étant positif, $\Delta' > 0$ sur $[0, t_1[$ et sur $]t_2, 1]$, et $\Delta' < 0$ sur $]t_1, t_2[$.

Calcul des valeurs extrêmes : en posant $u = t - \frac{1}{2}$, on a

$$\Delta(t) = \left(u + \frac{1}{2}\right)u \left(u - \frac{1}{2}\right) = u^3 - \frac{u}{4}.$$

Pour $u = -\frac{\sqrt{3}}{6}$: $u^3 = -\frac{3\sqrt{3}}{216} = -\frac{\sqrt{3}}{72}$ et $-\frac{u}{4} = \frac{\sqrt{3}}{24} = \frac{3\sqrt{3}}{72}$, donc

$$\Delta(t_1) = \frac{2\sqrt{3}}{72} = \frac{\sqrt{3}}{36}. \text{ Par imparité de } u \mapsto u^3 - \frac{u}{4}, \quad \Delta(t_2) = -\frac{\sqrt{3}}{36}.$$

t	0		t_1		t_2		1
$\Delta'(t)$		+	0	−	0	+	
$\Delta(t)$	0	croît	$\frac{\sqrt{3}}{36}$	décroît		croît	0

$$-\frac{\sqrt{3}}{36}$$

On en déduit : pour tout $t \in [0, 1]$, $-\frac{\sqrt{3}}{36} \leq \Delta(t) \leq \frac{\sqrt{3}}{36}$, soit $|\Delta(t)| \leq \frac{\sqrt{3}}{36}$.

Étape 5 : majoration de l'erreur d'interpolation.

Soit $t \in [0, 1]$.

Si $t \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$, alors $\ln(1+t) - P_\theta(t) = 0$ et l'inégalité est vraie.

Sinon, on applique l'étape 3 avec $\alpha = t$: il existe $c \in]0, 1[$ tel que

$$\ln(1+t) - P_\theta(t) = \frac{\Delta(t)}{6} \cdot \frac{2}{(1+c)^3}. \text{ Comme } c \geq 0, (1+c)^3 \geq 1, \text{ donc } 0 < \frac{2}{(1+c)^3} \leq 2.$$

Par conséquent :

$$|\ln(1+t) - P_\theta(t)| \leq \frac{2|\Delta(t)|}{6} = \frac{|\Delta(t)|}{3} \leq \frac{\sqrt{3}}{108} = \frac{1}{36\sqrt{3}}.$$

(on a utilisé $\frac{\sqrt{3}}{108} = \frac{3}{108\sqrt{3}} = \frac{1}{36\sqrt{3}}$).

Étape 6 : majoration de $|I - I^*|$.

Par linéarité de l'intégrale, puis inégalité triangulaire intégrale et croissance de l'intégrale (bornes dans l'ordre croissant) :

$$\begin{aligned} |I - I^*| &= \left| \int_0^1 (\ln(1+t) - P_\theta(t)) e^t dt \right| \leq \int_0^1 |\ln(1+t) - P_\theta(t)| e^t dt \leq \frac{1}{36\sqrt{3}} \int_0^1 e^t dt \\ &= \frac{e-1}{36\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Or $e < 2,72$, donc $e - 1 < 1,72$, et $\sqrt{3} > 1,7$, donc $1,08\sqrt{3} > 1,836 > e - 1$. Ainsi $\frac{e-1}{36\sqrt{3}} < \frac{1,08}{36} = 0,03$.

Conclusion

$$|I - I^*| \leq \frac{e-1}{36\sqrt{3}} \approx 0,0276 < 3 \cdot 10^{-2}.$$

Remarque : une évaluation numérique de I (non demandée) donne $I \approx 0,7588$, de sorte que l'erreur réelle est de l'ordre de $7 \cdot 10^{-4}$; la majoration obtenue est donc valable mais assez large.

Question adaptée au programme actuel : la dernière inégalité de l'énoncé original portait sur $|1 - I^*|$, ce qui est une coquille (on a $|1 - I^*| \approx 0,24$) ; l'énoncé rectifié porte sur $|I - I^*|$, conformément à l'objectif de la question.

EXERCICE 2

Données. Les relevés sont indexés par $i \in \{-3, \dots, 3\}$, l'année 1982 correspondant à $i = -3$ et l'année 1988 à $i = 3$; ainsi $t_i = 1985 + i$ et $x_i = i$. Les valeurs de $y_i = \frac{n_i - 400}{25}$ sont :

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
y_i	-5	0	2	5	6	5	4

On calcule les sommes utiles :

$$\begin{aligned} \sum x_i &= 0, & \sum y_i &= 17, & \sum x_i^2 &= 2(1 + 4 + 9) = 28, & \sum x_i y_i &= 15 + 0 - 2 \\ &+ 0 + 6 + 10 + 12 = 41, & \sum y_i^2 &= 131. \end{aligned}$$

Question I.(1)

Question adaptée au programme actuel : l'énoncé rappelle la définition de la droite de régression par les moindres carrés et la formule de ses coefficients, conformément au programme qui demande que ces résultats soient rappelés ou établis.

Méthode 1 — Formules rappelées dans l'énoncé.

$$\bar{x} = 0 \text{ et } \bar{y} = \frac{17}{7}.$$

$$s_x^2 = \frac{1}{7} \sum x_i^2 = \frac{28}{7} = 4$$

(car $\bar{x} = 0$).

$$s_{xy} = \frac{1}{7} \sum x_i (y_i - \bar{y}) = \frac{1}{7} \left(\sum x_i y_i - \bar{y} \sum x_i \right) = \frac{41}{7}.$$

$$\text{D'où } a = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{41}{28} \text{ et } b = \bar{y} - a\bar{x} = \frac{17}{7}.$$

Méthode 2 — Minimisation directe de F (fonction de deux variables).

$$F(a, b) = \sum_{i=-3}^3 (y_i - ax_i - b)^2$$

est une fonction polynomiale, donc de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. En développant avec les sommes calculées :

$$F(a, b) = 131 + 28a^2 + 7b^2 - 82a - 34b + 2ab \sum x_i = 131 + 28a^2 + 7b^2 - 82a - 34b.$$

Gradient : $\partial_1 F(a, b) = 56a - 82$ et $\partial_2 F(a, b) = 14b - 34$. L'unique point critique est $\left(\frac{41}{28}, \frac{17}{7}\right)$.

Hessienne : en tout point (a, b) , $\nabla^2 F(a, b) = \begin{pmatrix} 56 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$. Cette matrice est diagonale ; ses

valeurs propres sont 56 et 14, strictement positives.

$\mathbb{R}^2$ est un ouvert convexe sur lequel la hessienne de F a, en tout point, des valeurs propres strictement positives ; donc le point critique est un minimum global de F . Il est l'unique point de minimum : tout point de minimum global sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ est un point critique, et il n'y en a qu'un.

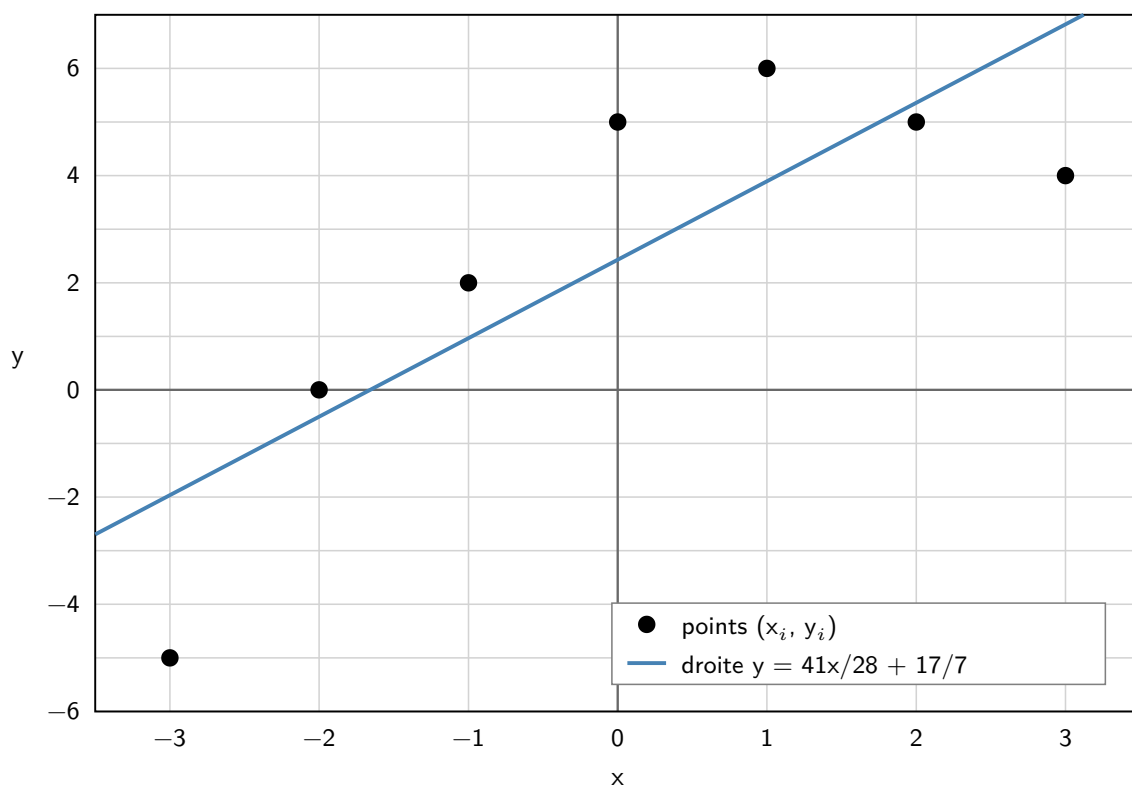
La méthode 2 redémontre, sur cet exemple, la formule admise par l'énoncé ; elle montre aussi que le centrage $\bar{x} = 0$ découple les variables a et b .

Conclusion

la droite de régression de y en x a pour équation $y = \frac{41}{28}x + \frac{17}{7}$, soit environ $y = 1,464x + 2,429$.

Question I.(2)

On place les sept points du tableau et la droite passant par le point moyen $\left(0, \frac{17}{7}\right)$, de pente $\frac{41}{28}$ (par exemple par les points $(-3; -1,964)$ et $(3; 6,821)$).



Le nuage présente une croissance puis une décroissance des ventes ; un ajustement affine en rend mal compte, ce qui motive l'ajustement polynomial de degré 2 de la partie II.

Question II.(1)

On note que l'ensemble des indices $\{-p, \dots, p\}$ est symétrique par rapport à 0 : le changement d'indice $i \mapsto -i$ est une bijection de cet ensemble sur lui-même. Par conséquent, si g est une fonction impaire,

$$\sum_{i=-p}^p g(i) = \sum_{i=-p}^p g(-i) = - \sum_{i=-p}^p g(i),$$

donc

$$\sum_{i=-p}^p g(i) = 0.$$

Couple (0, 1) :

$$\sum_{i=-p}^p P_0(i)P_1(i) = \sum_{i=-p}^p i = 0$$

car $i \mapsto i$ est impaire.

Couple (1, 2) : $P_1(i)P_2(i) = i^3 - \frac{p^2+p}{3}i$ est une fonction impaire de i , donc

$$\sum_{i=-p}^p P_1(i)P_2(i) = 0.$$

Couple (0, 2) : on utilise la formule rappelée (qui se démontre par récurrence sur p : elle est vraie pour $p = 1$, et

$$\frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + (p+1)^2 = \frac{(p+1)(2p^2+7p+6)}{6} = \frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6}$$

). Comme le terme d'indice 0 est nul et que $i \mapsto i^2$ est paire :

$$\sum_{i=-p}^p i^2 = 2 \sum_{i=1}^p i^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{3}.$$

Le nombre de termes de la somme est $2p+1$, donc :

$$\sum_{i=-p}^p P_0(i)P_2(i) = \sum_{i=-p}^p i^2 - (2p+1)\frac{p^2+p}{3} = \frac{p(p+1)(2p+1)}{3} - \frac{(2p+1)p(p+1)}{3} = 0.$$

Conclusion

pour tout $(k, l) \in \{(0, 1), (0, 2), (1, 2)\}$,

$$\sum_{i=-p}^p P_k(i)P_l(i) = 0.$$

Autrement dit, dans $\mathbb{R}^{2p+1}$ muni du produit scalaire canonique, les vecteurs $U_k = (P_k(i))_{-p \leq i \leq p}$, $k = 0, 1, 2$, sont deux à deux orthogonaux.

Question II.(2)

Avec $p = 3$, on a $P_2(x) = x^2 - 4$ et, puisque $x_i = i$, $P(x_i) = \alpha P_0(i) + \beta P_1(i) + \gamma P_2(i)$. On utilisera les valeurs :

i	-3	-2	-1	0	1	2	3
$P_0(i)$	1	1	1	1	1	1	1
$P_1(i)$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$P_2(i)$	5	0	-3	-4	-3	0	5
y_i	-5	0	2	5	6	5	4

Question II.(2).a)

β et γ étant fixés, on pose $r_i = y_i - \beta P_1(i) - \gamma P_2(i)$; alors

$$A(\alpha) = \sum_{i=-3}^3 (r_i - \alpha P_0(i))^2.$$

Méthode 1 — Étude d'un trinôme du second degré en α .

En développant :

$$A(\alpha) = \alpha^2 \sum P_0(i)^2 - 2\alpha \sum P_0(i)r_i + \sum r_i^2.$$

D'après II.(1) avec $p = 3$:

$$\sum P_0(i)r_i = \sum P_0(i)y_i - \beta \sum P_0(i)P_1(i) - \gamma \sum P_0(i)P_2(i) = \sum P_0(i)y_i.$$

Le coefficient

$$\sum P_0(i)^2 = 7$$

est strictement positif. La fonction A est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$A'(\alpha) = 2\alpha \sum P_0(i)^2 - 2 \sum P_0(i)y_i;$$

A' est strictement négative avant

$$\alpha_0 = \frac{\sum P_0(i)y_i}{\sum P_0(i)^2},$$

nulle en α_0 et strictement positive après. Donc A est strictement décroissante sur $] - \infty, \alpha_0]$ et strictement croissante sur $[\alpha_0, +\infty[$: elle atteint son minimum en α_0 , et seulement en ce point.

Méthode 2 — Interprétation euclidienne (projection orthogonale).

Dans $\mathbb{R}^7$ muni du produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on note $Y = (y_i)_{-3 \leq i \leq 3}$, $U_k = (P_k(i))_{-3 \leq i \leq 3}$ et $Z = Y - \beta U_1 - \gamma U_2$. Alors $A(\alpha) = \|Z - \alpha U_0\|^2$.

Minimiser A revient à minimiser la distance de Z à un vecteur de la droite $D = \text{Vect}(U_0)$ ($U_0 \neq 0$). Par la caractérisation de la projection orthogonale par minimisation de la distance, le minimum est atteint uniquement en $\alpha U_0 = p_D(Z)$, où p_D est la projection orthogonale sur D . Comme $\frac{U_0}{\|U_0\|}$ est une base orthonormale de D :

$$p_D(Z) = \frac{\langle Z, U_0 \rangle}{\|U_0\|^2} U_0, \quad \text{donc} \quad \alpha = \frac{\langle Z, U_0 \rangle}{\|U_0\|^2} = \frac{\langle Y, U_0 \rangle}{\|U_0\|^2},$$

la dernière égalité venant de $\langle U_1, U_0 \rangle = \langle U_2, U_0 \rangle = 0$ (question II.(1)).

La méthode 2 explique géométriquement le rôle de II.(1) : grâce à l'orthogonalité, la valeur optimale de α ne dépend ni de β ni de γ .

Conclusion

la valeur de α rendant A minimale est

$$\alpha_0 = \frac{\sum_{i=-3}^3 P_0(i) y_i}{\sum_{i=-3}^3 P_0(i)^2},$$

indépendante de β et γ .

Question II.(2).b)

On raisonne exactement comme en a), en échangeant les rôles de P_0 et P_1 . Avec $\alpha = \alpha_0$ et γ fixés, posons $r'_i = y_i - \alpha_0 P_0(i) - \gamma P_2(i)$; alors :

$$A(\beta) = \beta^2 \sum P_1(i)^2 - 2\beta \sum P_1(i) r'_i + \sum r_i'^2,$$

et, d'après II.(1),

$$\sum P_1(i) r'_i = \sum P_1(i) y_i.$$

Comme

$$\sum P_1(i)^2 = 28 > 0,$$

la même étude de trinôme montre que A est minimale pour une unique valeur :

$$\beta_0 = \frac{\sum_{i=-3}^3 P_1(i)y_i}{\sum_{i=-3}^3 P_1(i)^2}.$$

Conclusion

$$\beta_0 = \frac{\sum P_1(i)y_i}{\sum P_1(i)^2}.$$

Question II.(2).c)

De même, avec $\alpha = \alpha_0$ et $\beta = \beta_0$, en posant $r_i'' = y_i - \alpha_0 P_0(i) - \beta_0 P_1(i)$, on a

$$A(\gamma) = \gamma^2 \sum P_2(i)^2 - 2\gamma \sum P_2(i)r_i'' + \sum r_i''^2$$

et, d'après II.(1),

$$\sum P_2(i)r_i'' = \sum P_2(i)y_i.$$

Comme

$$\sum P_2(i)^2 = 25 + 0 + 9 + 16 + 9 + 0 + 25 = 84 > 0,$$

le minimum est atteint pour une unique valeur.

Conclusion

$$\gamma_0 = \frac{\sum_{i=-3}^3 P_2(i)y_i}{\sum_{i=-3}^3 P_2(i)^2}.$$

Question II.(2).d)

Calculs à partir du tableau :

$$\sum P_0(i)y_i = 17$$

et

$$\sum P_0(i)^2 = 7,$$

donc $\alpha_0 = \frac{17}{7} \approx 2,429.$

$$\sum P_1(i)y_i = 41$$

et

$$\sum P_1(i)^2 = 28,$$

donc $\beta_0 = \frac{41}{28} \approx 1,464.$

$$\sum P_2(i)y_i = 5 \cdot (-5) + 0 \cdot 0 + (-3) \cdot 2 + (-4) \cdot 5 + (-3) \cdot 6 + 0 \cdot 5 + 5 \cdot 4 = -25 - 6$$

$$- 20 - 18 + 20 = -49$$

et

$$\sum P_2(i)^2 = 84,$$

donc $\gamma_0 = -\frac{49}{84} = -\frac{7}{12} \approx -0,583.$

La fonction d'ajustement est donc :

$$P(x) = \frac{17}{7} + \frac{41}{28}x - \frac{7}{12}(x^2 - 4) = -\frac{7}{12}x^2 + \frac{41}{28}x + \frac{100}{21},$$

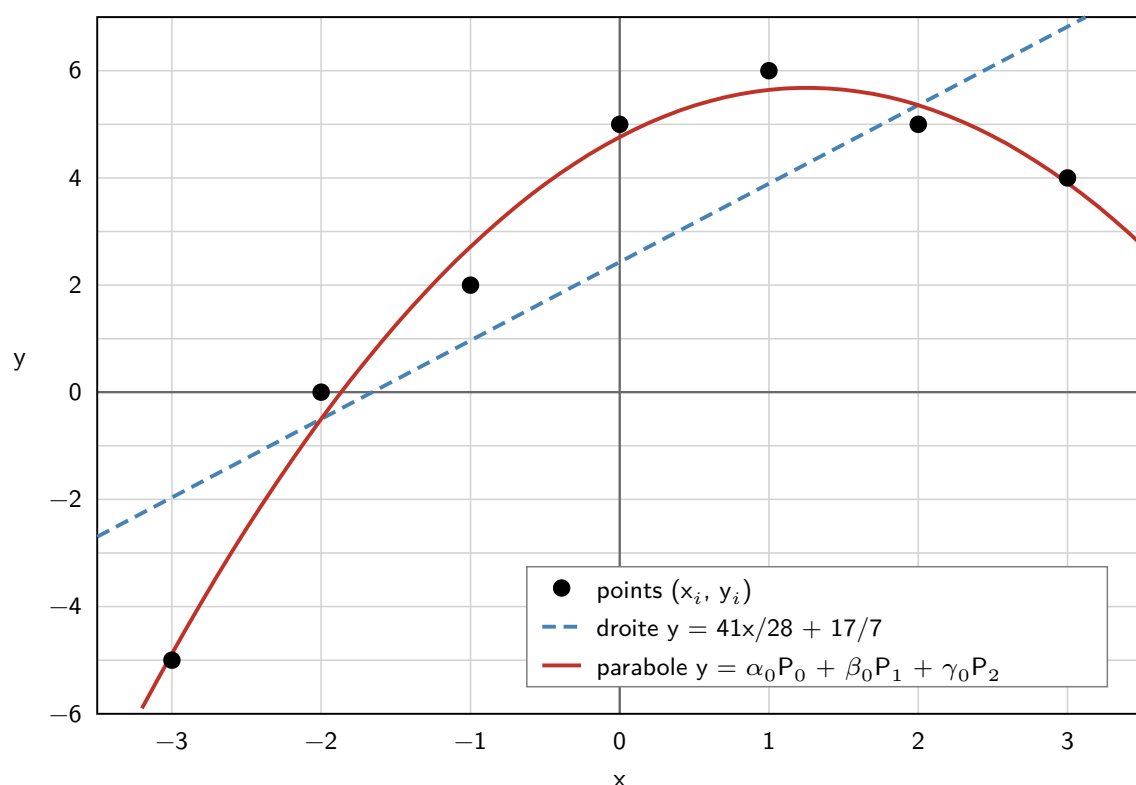
car $\frac{17}{7} + \frac{7}{3} = \frac{51 + 49}{21} = \frac{100}{21} \approx 4,762.$

Remarque : $\alpha_0 + \beta_0 x$ est exactement la droite de régression de I.(1), ce qui est cohérent avec l'orthogonalité de U_0, U_1, U_2 .

Valeurs de P aux points du relevé, pour contrôle :

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
y_i	-5	0	2	5	6	5	4
$P(x_i)$	-4,881	-0,500	2,714	4,762	5,643	5,357	3,905

Représentation graphique sur le graphique de I.(2) :



Remarque sur l'optimalité globale. Les questions a), b), c) minimisent A successivement par rapport à chaque variable. Grâce à II.(1), les termes croisés disparaissent dans le développement de A :

$$A(\alpha, \beta, \gamma) = 131 + (7\alpha^2 - 34\alpha) + (28\beta^2 - 82\beta) + (84\gamma^2 + 98\gamma).$$

A est une somme de trois fonctions d'une seule variable, chacune minimale en $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ respectivement : $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ est donc le point de minimum global de A sur $\mathbb{R}^3$ (de façon équivalente, la hessienne de A est la matrice diagonale de coefficients 14, 56, 168, à valeurs propres strictement positives sur l'ouvert convexe $\mathbb{R}^3$). La valeur minimale vaut $131 - \frac{289}{7} - \frac{1681}{28} - \frac{343}{12} = \frac{23}{21} \approx 1,10$, contre $\frac{831}{28} \approx 29,68$ pour l'ajustement affine.

PROBLÈME

Première partie — A

Modélisation. Pour $m \geq 1$, on note X_m la variable aléatoire égale à 1 si le m -ième acheteur choisit la présentation P et à 0 sinon. D'après l'énoncé, les variables X_m sont mutuellement indépendantes et suivent la loi de Bernoulli de paramètre p . On note $S_m = X_1 + \dots + X_m$ le nombre de choix de P parmi les m premiers achats, et, pour $k \geq 1$, B_k l'événement $[S_{3k} = k]$.

Question A.1

Sur $3n$ achats, la fréquence observée de choix de P est $\frac{S_{3n}}{3n}$; elle vaut $\frac{1}{3}$ si et seulement si $S_{3n} = n$.

S_{3n} est la somme de $3n$ variables de Bernoulli de paramètre p mutuellement indépendantes : elle suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3n, p)$.

Conclusion

$$p_n = P(B_n) = \binom{3n}{n} p^n (1-p)^{2n}.$$

Question A.2.(a)

Interprétation de q_n . La fréquence observée après m achats est $\frac{S_m}{m}$; l'égalité $\frac{S_m}{m} = \frac{1}{3}$ impose $m = 3S_m$, donc m multiple de 3; pour $m = 3k$, elle équivaut à $S_{3k} = k$, c'est-à-dire à B_k . Obtenir pour la première fois la fréquence $\frac{1}{3}$ au $(3n)$ -ième achat, c'est donc réaliser l'événement :

$$F_n = \overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{n-1}} \cap B_n \quad (\text{avec } F_1 = B_1), \quad \text{et} \quad q_n = P(F_n).$$

Égalité $p_1 = q_1$: $F_1 = B_1$, donc $q_1 = P(B_1) = p_1$.

Égalité $p_2 = q_1 p_1 + q_2$: $(B_1, \overline{B_1})$ est un système complet d'événements, donc $p_2 = P(B_2) = P(B_1 \cap B_2) + P(\overline{B_1} \cap B_2)$, et $\overline{B_1} \cap B_2 = F_2$.

Sur B_1 , on a $S_3 = 1$, donc $S_6 = 2$ équivaut à $T = 1$ où $T = X_4 + X_5 + X_6$. Ainsi

$B_1 \cap B_2 = B_1 \cap [T = 1]$. L'événement B_1 ne dépend que de (X_1, X_2, X_3) et T ne dépend que de (X_4, X_5, X_6) ; par le lemme des coalitions, B_1 et $[T = 1]$ sont indépendants. De plus $T \hookrightarrow \mathcal{B}(3, p)$, donc $P(T = 1) = \binom{3}{1}p(1-p)^2 = p_1$.

Conclusion

$$P(B_1 \cap B_2) = p_1 \cdot p_1 = q_1 p_1 \text{ et } p_2 = q_1 p_1 + q_2.$$

Question A.2.(b)

Soit $n \geq 2$.

Étape 1 : décomposition de B_n . Les événements $F_1, \dots, F_n$ sont deux à deux incompatibles : si $k < k'$, $F_k \subset B_k$ et $F_{k'} \subset \overline{B_k}$. Si B_n est réalisé, l'ensemble des $j \in \{1, \dots, n\}$ tels que B_j soit réalisé est non vide; en notant k son plus petit élément, F_k est réalisé. Donc $B_n = \bigcup_{k=1}^n (F_k \cap B_n)$, union disjointe, et :

$$p_n = \sum_{k=1}^{n-1} P(F_k \cap B_n) + P(F_n \cap B_n).$$

Comme $F_n \subset B_n$, $P(F_n \cap B_n) = q_n$.

Étape 2 : calcul de $P(F_k \cap B_n)$ pour $1 \leq k \leq n-1$. Sur F_k , on a $S_{3k} = k$, donc $S_{3n} = n$ équivaut à $T_k = n - k$, où

$$T_k = \sum_{m=3k+1}^{3n} X_m.$$

Ainsi $F_k \cap B_n = F_k \cap [T_k = n - k]$.

F_k s'exprime à l'aide des seules variables $X_1, \dots, X_{3k}$, et T_k est fonction des seules variables $X_{3k+1}, \dots, X_{3n}$; par le lemme des coalitions, F_k et $[T_k = n - k]$ sont indépendants. T_k est la somme de $3(n - k)$ variables de Bernoulli de paramètre p indépendantes, donc $T_k \hookrightarrow \mathcal{B}(3(n - k), p)$ et :

$$P(T_k = n - k) = \binom{n-k}{n-k} p^{n-k} (1-p)^{2(n-k)} = p_{n-k}.$$

Donc $P(F_k \cap B_n) = q_k p_{n-k}$.

Conclusion

pour tout $n \geq 2$,

$$p_n = \sum_{k=1}^{n-1} q_k p_{n-k} + q_n.$$

Question A.2.(c)

Étape 1 : l'égalité. D'après A.2.(a), $p_1 - q_1 = 0$, et d'après A.2.(b), pour $k \geq 2$,

$$p_k - q_k = \sum_{j=1}^{k-1} q_j p_{k-j}.$$

Donc, pour $n \geq 2$:

$$\sum_{k=1}^n (p_k - q_k) = \sum_{k=2}^n \sum_{j=1}^{k-1} p_{k-j} q_j.$$

L'application $(k, j) \mapsto (i, j) = (k - j, j)$ est une bijection de

$G_n = \{(k, j) \in \mathbb{N}^2 : 2 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq k - 1\}$ sur E_n : si $(k, j) \in G_n$, alors $i = k - j \geq 1$, $j \geq 1$ et $i + j = k \in [2, n]$; réciproquement, si $(i, j) \in E_n$, le couple $(k, j) = (i + j, j)$ est l'unique antécédent et appartient à G_n . Les sommes étant finies, on peut réindexer :

$$\sum_{k=1}^n (p_k - q_k) = \sum_{(i,j) \in E_n} p_i q_j.$$

Étape 2 : première inégalité. Si $(i, j) \in E_n$, alors $i = (i + j) - j \leq n - 1$ et de même $j \leq n - 1$, donc $E_n \subset \{1, \dots, n\}^2$. Les termes $p_i q_j$ étant positifs (ce sont des produits de probabilités) :

$$\sum_{(i,j) \in E_n} p_i q_j \leq \sum_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2} p_i q_j = \left(\sum_{i=1}^n p_i \right) \left(\sum_{j=1}^n q_j \right).$$

Étape 3 : encadrement. La première inégalité découle des étapes 1 et 2. Pour la seconde : si $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, alors $i \geq 1, j \geq 1$ et $2 \leq i + j \leq 2n$, donc $\{1, \dots, n\}^2 \subset E_{2n}$. Par positivité des termes, puis par l'étape 1 appliquée à $2n \geq 2$:

$$\left(\sum_{i=1}^n p_i \right) \left(\sum_{j=1}^n q_j \right) \leq \sum_{(i,j) \in E_{2n}} p_i q_j = \sum_{k=1}^{2n} (p_k - q_k).$$

Conclusion

pour tout $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^n (p_k - q_k) \leq \left(\sum_{i=1}^n p_i \right) \left(\sum_{j=1}^n q_j \right) \leq \sum_{k=1}^{2n} (p_k - q_k).$$

Question A.3.(a)

Les événements $F_1, \dots, F_n$ étant deux à deux incompatibles, $Q_n = P(F_1 \cup \dots \cup F_n)$.

De plus $F_1 \cup \dots \cup F_n = B_1 \cup \dots \cup B_n$: l'inclusion directe vient de $F_k \subset B_k$; l'inclusion réciproque se prouve comme en A.2.(b), en considérant le plus petit indice $k \leq n$ tel que B_k soit réalisé.

Conclusion

Q_n est la probabilité que la fréquence observée de choix de la présentation P soit égale à $\frac{1}{3}$ au moins une fois au cours des $3n$ premiers achats.

Question A.3.(b)

La série

$$\sum q_n$$

est à termes positifs, et ses sommes partielles vérifient $Q_n \leq 1$ puisque Q_n est une probabilité. La suite (Q_n) est croissante et majorée par 1 : elle converge par le théorème de la limite monotone.

Conclusion

la série

$$\sum_{n \geq 1} q_n$$

converge, et sa somme est inférieure ou égale à 1. Par continuité croissante de la probabilité, cette somme est la probabilité que la fréquence $\frac{1}{3}$ soit observée au moins une fois.

Question A.3.(c)

Notons

$$\Sigma_n = \sum_{k=1}^n p_k;$$

par hypothèse $\Sigma_n \rightarrow S$, et d'après A.3.(b), $Q_n \rightarrow Q$, où

$$Q = \sum_{n=1}^{+\infty} q_n.$$

L'encadrement de A.2.(c) s'écrit, pour $n \geq 2$:

$$\Sigma_n - Q_n \leq \Sigma_n Q_n \leq \Sigma_{2n} - Q_{2n}.$$

Les suites (Σ_{2n}) et (Q_{2n}) sont des suites extraites de suites convergentes : elles convergent respectivement vers S et Q . Par passage à la limite dans les inégalités larges :

$$S - Q \leq SQ \leq S - Q, \quad \text{donc} \quad SQ = S - Q, \quad \text{soit} \quad Q(S + 1) = S.$$

Comme $S \geq 0$, $S + 1 > 0$.

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n = \frac{S}{S + 1}.$$

Deuxième partie — B

Remarque préliminaire : pour $x \in [0, 1]$, $p_n = \binom{3n}{n} [x(1-x)^2]^n = \binom{3n}{n} x^n (1-x)^{2n}$ est la probabilité p_n de la partie A lorsque $p = x$.

Question B.1.(a)

Pour $n \geq 1$, on simplifie le quotient des factorielles :

$$\frac{\binom{3n+3}{n+1}}{\binom{3n}{n}} = \frac{(3n+3)!}{(n+1)!(2n+2)!} \cdot \frac{n!(2n)!}{(3n)!} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)(2n+2)(2n+1)}$$

$$= \frac{3(3n+2)(3n+1)}{(2n+2)(2n+1)}.$$

Ce quotient est strictement positif, ce qui donne la minoration.

Méthode 1 — Comparaison par différence.

$$\frac{27}{4} - \frac{3(3n+2)(3n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{27(2n+2)(2n+1) - 12(3n+2)(3n+1)}{4(2n+2)(2n+1)}.$$

Le numérateur vaut

$$27(4n^2 + 6n + 2) - 12(9n^2 + 9n + 2) = 108n^2 + 162n + 54 - 108n^2 - 108n - 24 = 54n + 30 > 0,$$

et le dénominateur est strictement positif.

Méthode 2 — Factorisation par $\frac{27}{4}$.

On écrit

$$(n+1)(2n+2)(2n+1) = \frac{3n+3}{3} \cdot \frac{2(3n+3)}{3} \cdot \frac{2\left(3n+\frac{3}{2}\right)}{3} = \frac{4}{27}(3n+3)^2 \left(3n+\frac{3}{2}\right),$$

d'où :

$$\frac{\binom{3n+3}{n+1}}{\binom{3n}{n}} = \frac{27}{4} \cdot \frac{3n+2}{3n+3} \cdot \frac{3n+1}{3n+\frac{3}{2}}.$$

Les deux derniers facteurs appartiennent à $]0, 1[$, d'où la majoration. Cette écriture montre de plus que le quotient tend vers $\frac{27}{4}$ et sera réutilisée en B.2.(a).

Conclusion

pour tout $n \geq 1$,

$$0 \leq \frac{\binom{3n+3}{n+1}}{\binom{3n}{n}} \leq \frac{3^3}{2^2}.$$

Question B.1.(b)

Posons $z = x(1-x)^2$; pour $x \in [0, 1]$, $z \geq 0$, donc $p_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$. On a $\varphi(x) = \frac{27}{4}z$ et, pour $n \geq 1$:

$$p_{n+1} = \frac{\binom{3n+3}{n+1}}{\binom{3n}{n}} z p_n \leq \frac{27}{4} z p_n = \varphi(x) p_n,$$

d'après B.1.(a) et puisque $z p_n \geq 0$.

Par récurrence sur $n \geq 1$, montrons $p_n \leq \varphi(x)^{n-1} p_1$. Pour $n = 1$, c'est une égalité. Si l'inégalité est vraie au rang n , alors, comme $\varphi(x) \geq 0$: $p_{n+1} \leq \varphi(x) p_n \leq \varphi(x)^n p_1$.

Conclusion

$$\text{pour tout } n \geq 1, \quad 0 \leq p_n \leq \left[\frac{3^3}{2^2} x(1-x)^2 \right]^{n-1} p_1.$$

Question B.1.(c)

φ est polynomiale, donc dérivable sur $[0, 1]$, et :

$$\varphi'(x) = \frac{27}{4} [(1-x)^2 - 2x(1-x)] = \frac{27}{4} (1-x)(1-3x).$$

Sur $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\varphi'(x) > 0$; sur $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$, $\varphi'(x) < 0$. Donc φ est strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$, avec $\varphi(0) = 0$, $\varphi\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{27}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} = 1$ et $\varphi(1) = 0$.

x	0		$\frac{1}{3}$		1
$\varphi'(x)$		+	0	—	
$\varphi(x)$	0	croît	1	décroît	0

Ainsi $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ sur $[0, 1]$, et, par stricte monotonie sur chaque intervalle, $\varphi(x) < 1$ pour $x \neq \frac{1}{3}$.

Convergence : si $x \neq \frac{1}{3}$, alors $0 \leq \varphi(x) < 1$, donc la série géométrique

$$\sum \varphi(x)^{n-1} p_1$$

converge. Comme $0 \leq p_n \leq \varphi(x)^{n-1} p_1$ (question B.1.(b)), le théorème de comparaison des séries à termes positifs donne la convergence de

$$\sum p_n.$$

Conclusion

$$\sum p_n$$

converge pour tout $x \in [0, 1] \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

Question B.1.(d)

Pour $x = \frac{1}{10}$: $z = \frac{1}{10} \cdot \frac{81}{100} = 0,081$, $\varphi = \varphi\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{27}{4} \cdot 0,081 = \frac{2187}{4000} = 0,54675$
 et $p_1 = 3z = 0,243$.

Majorant de r_n . La série converge (B.1.(c)) et, pour $k \geq n+1$, $0 \leq p_k \leq \varphi^{k-1} p_1$. En sommant ces inégalités (séries convergentes), puis avec la somme d'une série géométrique de raison $\varphi \in [0, 1[$:

$$0 \leq r_n \leq p_1 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi^{k-1} = \frac{p_1 \varphi^n}{1 - \varphi} = \frac{0,243}{0,45325} (0,54675)^n.$$

Choix de n . L'erreur commise en remplaçant S par s_n est $S - s_n = r_n \geq 0$. Le majorant $\frac{p_1 \varphi^n}{1 - \varphi}$ décroît avec n ; il vaut environ 0,0143 pour $n = 6$ et 0,00783 pour $n = 7$. On peut donc choisir $n = 7$ (et toute valeur supérieure) : $0 \leq S - s_7 < 10^{-2}$.

Calcul de s_7 . Avec $p_k = \binom{3k}{k} (0,081)^k$:

k	1	2	3	4	5	6	7
$\binom{3k}{k}$	3	15	84	495	3003	18564	116280
p_k	0,24300	0,09842	0,04464	0,02131	0,01047	0,00524	0,00266

D'où $s_7 \approx 0,42574$, et $s_7 \leq S \leq s_7 + 0,00784$, soit $0,4257 \leq S \leq 0,4336$.

Remarque (majorant plus fin) : pour $k \geq n$, B.1.(b) donne $p_{k+1} \leq \varphi p_k$, donc $p_{n+j} \leq \varphi^j p_n$ et $r_n \leq \frac{\varphi}{1 - \varphi} p_n$. Ce majorant vaut environ 0,0063 pour $n = 6$: la somme $s_6 \approx 0,42308$ convient déjà.

Valeur approchée de l . La fonction $h : s \mapsto \frac{s}{s+1} = 1 - \frac{1}{s+1}$ est croissante sur $[0, +\infty[$ et $h'(s) = \frac{1}{(1+s)^2} \leq 1$; par l'inégalité des accroissements finis, $0 \leq h(S) - h(s_7) \leq S - s_7 < 10^{-2}$. Ainsi $l = h(S)$ vérifie :

$$0,2986 \approx \frac{s_7}{1+s_7} \leq l \leq \frac{s_7 + 0,00784}{1+s_7+0,00784} \approx 0,3025.$$

Conclusion

$s_7 \approx 0,426$ est une valeur approchée de S à 10^{-2} près, et $l \approx 0,30$. D'après A.3.(c) avec $p = \frac{1}{10}$, l est la probabilité que la fréquence de choix de la présentation P atteigne au moins une fois la valeur $\frac{1}{3}$.

Question B.2.(a)

Pour $x = \frac{1}{3}$: $x(1-x)^2 = \frac{4}{27}$, donc $p_n = \binom{3n}{n} \left(\frac{4}{27}\right)^n > 0$, et d'après l'écriture de la méthode 2 de B.1.(a) :

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{4}{27} \cdot \frac{\binom{3n+3}{n+1}}{\binom{3n}{n}} = \frac{3n+2}{3n+3} \cdot \frac{3n+1}{3n+\frac{3}{2}} = \left(1 - \frac{1}{3n+3}\right) \left(1 - \frac{1}{6n+3}\right).$$

Méthode 1 — Développements asymptotiques élémentaires.

$$\frac{1}{3n+3} - \frac{1}{3n} = \frac{-3}{3n(3n+3)} = -\frac{1}{n(3n+3)}, \text{ et } n \cdot \frac{1}{n(3n+3)} \rightarrow 0 : \text{ donc } \frac{1}{3n+3} = \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$\text{De même } \frac{1}{6n+3} - \frac{1}{6n} = -\frac{3}{6n(6n+3)} = o\left(\frac{1}{n}\right), \text{ donc } \frac{1}{6n+3} = \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

En développant le produit, le terme $\frac{1}{(3n+3)(6n+3)}$ est $o\left(\frac{1}{n}\right)$ (il est majoré par

$\frac{1}{18n^2}$). Donc :

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = 1 - \frac{1}{3n} - \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Méthode 2 — Écriture exacte.

On réduit au même dénominateur : $(3n+3)\left(3n+\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}(n+1)(2n+1)$ et $(3n+2)(3n+1) = 9n^2 + 9n + 2$, donc :

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{2(9n^2 + 9n + 2)}{9(n+1)(2n+1)} = 1 - \frac{9n+5}{9(n+1)(2n+1)},$$

car $9(n+1)(2n+1) = 18n^2 + 27n + 9$ et $18n^2 + 27n + 9 - (18n^2 + 18n + 4) = 9n + 5$. Or $n \cdot \frac{9n+5}{9(n+1)(2n+1)} \rightarrow \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$, donc $\frac{9n+5}{9(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

La méthode 2 est plus calculatoire mais fournit une expression exacte, très utile pour la question suivante.

Conclusion

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \text{ soit } \lambda = -\frac{1}{2}.$$

Question B.2.(b)

On a $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$, et $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} = o\left(\frac{1}{n}\right)$. Donc :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Méthode 1 — Comparaison des développements.

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(-\frac{1}{2} + 1\right) \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \text{ donc } n \left(\frac{p_{n+1}}{p_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n}\right) \rightarrow \frac{1}{2} > 0.$$

Par définition de la limite (avec $\varepsilon = \frac{1}{4}$), il existe n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, cette quantité soit supérieure à $\frac{1}{4}$, donc positive.

Méthode 2 — Calcul exact.

Avec l'expression exacte de B.2.(a) :

$$\begin{aligned} \frac{p_{n+1}}{p_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{1}{n+1} - \frac{9n+5}{9(n+1)(2n+1)} = \frac{9(2n+1) - (9n+5)}{9(n+1)(2n+1)} = \frac{9n+4}{9(n+1)(2n+1)} \\ &> 0. \end{aligned}$$

L'inégalité est donc vraie pour tout $n \geq 1$: on peut prendre $n_0 = 1$.

La méthode 1 montre la puissance d'une comparaison asymptotique (seul le coefficient de $\frac{1}{n}$ compte) ; la méthode 2 donne un n_0 explicite.

Conclusion

il existe n_0 (on peut prendre $n_0 = 1$) tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\frac{p_{n+1}}{p_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

Question B.2.(c)

Les termes p_n et v_n sont strictement positifs. Pour $n \geq n_0$, l'inégalité de B.2.(b) équivaut à $\frac{p_{n+1}}{v_{n+1}} \geq \frac{p_n}{v_n}$: la suite $\left(\frac{p_n}{v_n}\right)_{n \geq n_0}$ est croissante. Donc, pour tout $n \geq n_0$:

$$p_n \geq C v_n = \frac{C}{n}, \quad \text{où} \quad C = \frac{p_{n_0}}{v_{n_0}} > 0.$$

La série harmonique

$$\sum \frac{1}{n}$$

diverge (série de Riemann d'exposant 1), donc

$$\sum \frac{C}{n}$$

diverge aussi. Par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum p_n$$

diverge.

Conclusion

pour $x = \frac{1}{3}$, la série

$$\sum p_n$$

est divergente.

Remarque : avec $n_0 = 1$, $C = p_1 = \frac{4}{9}$, d'où $p_n \geq \frac{4}{9n}$ pour tout $n \geq 1$.

Relevé des adaptations

Exercice 1, question 2 : rectification de la dernière inégalité, $|1 - I^*| < 3 \cdot 10^{-2}$ devenant $|I - I^*| < 3 \cdot 10^{-2}$; l'énoncé original contient une coquille ($|1 - I^*| \approx 0,24$), et toute la question vise la majoration de l'erreur $I - I^*$.

Exercice 1 : notation de la fonction $\ln(1 + t)$ unifiée en θ (l'original écrivait Θ puis θ) et corrections typographiques (« considéré », « étudié ») sans incidence mathématique.

Exercice 2, question I.(1) : ajout d'un rappel de la définition de la droite de régression par les moindres carrés et de la formule de ses coefficients, car le programme demande que les résultats de moindres carrés et de régression soient rappelés ou établis.

Exercice 2, question II.(1) : ajout du rappel de la formule

$$\sum_{i=1}^p i^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6},$$

que le programme demande de rappeler ou d'établir.

Problème, partie B : la notation ancienne C_{3n}^n est remplacée par $\binom{3n}{n}$; coquille «se prote» corrigée en «se porte» dans la partie A.

Exercice 2, questions I.(2) et II.(2).d) : les représentations graphiques demandées sont tracées en SVG dans le corrigé, à partir des valeurs exactes calculées.