



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ECRICOME — 1989

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

EXERCICE DE MATHÉMATIQUES

On considère la fonction numérique F , d'une variable réelle, définie par :

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{4+t^4}}$$

1. Quel est l'ensemble de définition de F ?
2. Montrer que F est une fonction impaire.
3. Justifier la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$.
4. Établir, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\frac{x}{\sqrt{4+16x^4}} \leq F(x) \leq \frac{x}{\sqrt{4+x^4}}$$

En déduire la limite de F en $+\infty$.

5. Dresser le tableau de variations de F .
6. En précisant la méthode employée et en détaillant les calculs intermédiaires, déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de $F(1)$.
7. Construire la courbe représentative de F .
8. On pose, pour $x > 0$:

$$H(x) = x \int_x^{2x} \left[\frac{1}{\sqrt{4+t^4}} - \frac{1}{t^2} \right] dt$$

Établir que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = 0$.

En déduire un équivalent de F en $+\infty$.

EXERCICE DE PROBABILITÉS-STATISTIQUES

Un commerçant vend un certain produit périssable A qu'il achète lui-même a francs (par unité de A) et revend en réalisant un bénéfice de b francs (par unité de A).

Les produits sont achetés par le commerçant le matin et vendus dans la journée, sinon ils sont perdus.

Le problème de ce commerçant est donc de déterminer le nombre optimal S d'unités de ce produit qu'il devrait acheter chaque matin.

On suppose que le nombre X d'unités de cet article demandé en une journée par la clientèle est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ avec comme probabilité de l'événement $[X = k]$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = p_k, \quad p_k > 0.$$

1. On suppose dans cette question que le commerçant achète le matin N unités du produit A .

(a) Quel est, en fonction du nombre k de demandes des clients, le gain de ce commerçant ?

(b) Calculer l'espérance E_N de ce gain.

2. (a) Démontrer que

$$E_{N+1} - E_N = b - (a + b) \sum_{k=0}^N p_k.$$

(b) Préciser les conditions dans lesquelles les termes de la suite (E_N) sont dans un ordre croissant puis décroissant.

- (c) Montrer alors que le bénéfice optimal est obtenu pour la plus petite valeur de N telle que $E_{N+1} - E_N < 0$ ou encore telle que :

$$\sum_{k=0}^N p_k > \frac{b}{a+b}.$$

PROBLÈME

Une compagnie de distribution organise un jeu à l'intention de sa clientèle. À chaque passage dans l'un de ses établissements, le client reçoit une carte portant, dans un ordre quelconque, les n lettres, toutes distinctes, formant le nom de la compagnie.

Selon le nombre de lettres placées au bon endroit, dans l'écriture du nom, le client peut alors recevoir un prix.

Le but de ce problème est d'étudier ce jeu.

Première partie - A

On dispose d'une liste de n éléments distincts dans un ordre donné.

Pour k et n entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$ et $n \geq 1$, on note $I(k, n)$ le nombre de permutations de ces n éléments qui laissent exactement k éléments aux positions qu'ils occupaient initialement dans la liste.

Par convention, on pose $I(0, 0) = 1$ et on note :

$$C_n^k = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! (n-k)!}.$$

1. Propriétés de $I(k, n)$.

- (a) Montrer que $I(k, n) = C_n^k I(0, n-k)$.

- (b) En déduire la relation :

$$\sum_{k=0}^n C_n^k I(0, k) = n! \quad (1)$$

2. Calcul de $I(k, n)$.

(a) Montrer que $C_i^k C_n^i = C_n^k C_{n-k}^{i-k}$ pour $0 \leq k \leq i \leq n$.

En déduire que, pour $0 \leq k < n$:

$$\sum_{i=k}^n (-1)^i C_i^k C_n^i = 0.$$

(b) En écrivant la relation (1) avec n prenant successivement les valeurs $0, 1, 2, \dots, p$, établir :

$$I(0, p) = p! \sum_{i=0}^p \frac{(-1)^i}{i!}.$$

3. Probabilités associées au jeu.

On note X_n la variable aléatoire prenant comme valeur le nombre de lettres correctement placées sur une carte tirée au hasard. On suppose que les lettres sont imprimées de façon à ce que toutes les permutations de lettres soient équiprobables.

(a) Montrer que $P(X_n = k) = \frac{I(k, n)}{n!}$ pour $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

(b) Après avoir vérifié que, pour $n \geq 2$ et $1 \leq k \leq n$: $k P(X_n = k) = P(X_{n-1} = k - 1)$, calculer l'espérance de X_n .

4. Étude asymptotique.

(a) Quelle est la limite, quand n tend vers $+\infty$, de $P(X_n = k)$, où k est un entier fixé ?

(b) En déduire que, pour n grand, $P(X_n = k)$ peut être approché par $p_k = P(X = k)$, où X est une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ à préciser.

5. Évaluation numérique de $P(X_n = k)$.

(a) On considère la série numérique

$$\sum_{n \geq 0} u_n,$$

où $u_n = \frac{(-1)^n}{n!}$, dont la somme est e^{-1} .

On pose : $s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Montrer que les deux suites $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(s_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones.

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, e^{-1} est élément de l'intervalle d'extrémités s_n et s_{n+1} , puis que :

$$|s_n - e^{-1}| \leq |u_{n+1}|.$$

(c) Montrer alors que, si l'on donne $p_k = \frac{e^{-1}}{k!}$ comme valeur approchée de $P(X_n = k)$, l'erreur vérifie :

$$|p_k - P(X_n = k)| \leq \frac{1}{k!(n-k+1)!}.$$

(d) Dans l'hypothèse où $n = 7$, montrer que pour tout $k \in \{0, 1, \dots, 7\}$:

$$|p_k - P(X_7 = k)| \leq 2 \cdot 10^{-3}.$$

Deuxième partie - B

Cette seconde partie étudie l'espérance du gain d'un participant à ce jeu.

1. On considère la fonction numérique f , d'une variable réelle, définie par :

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

(a) Étudier et représenter la fonction f .

(b) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, la dérivée n -ième de f , notée $f^{(n)}(x)$. Préciser $f^{(n)}(0)$.

(c) Constater que :
$$P(X_n = k) = \frac{1}{k!} \cdot \frac{f^{(n-k)}(0)}{(n-k)!}.$$

2. On suppose dans la suite du problème que le montant g_k du prix gagné par un client, si la carte qu'il reçoit comporte k lettres bien placées, est fixé à : $g_k = S \cdot k! \cdot \alpha^k$.

S désigne une constante réelle strictement positive, α un réel strictement supérieur à 2.

Soit G_n la variable aléatoire égale au gain de ce client à la suite de l'examen d'une carte qu'il reçoit au hasard.

(a) Exprimer à l'aide des valeurs de la fonction f et de ses dérivées en 0 l'espérance $E(G_n)$ de la variable G_n et justifier la relation :

$$E(G_n) = S \cdot \alpha^n \left[f\left(\frac{1}{\alpha}\right) - I_n(\alpha) \right]$$

où :

$$I_n(\alpha) = \int_0^{1/\alpha} \frac{\left(\frac{1}{\alpha} - t\right)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

(b) Montrer que, pour tout $t \in \left[0, \frac{1}{\alpha}\right]$ et tout entier $p \in \mathbb{N}$:

$$|f^{(p)}(t)| \leq \frac{p! e^{-t}}{(1-t)^{p+1}} \sum_{k=0}^p \frac{(1-t)^k}{k!}$$

puis que :

$$|f^{(p)}(t)| \leq \frac{p! e^{1-2t}}{(1-t)^{p+1}}.$$

En déduire :

$$|f^{(p)}(t)| \leq \frac{p! e}{\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^{p+1}}.$$

(c) Établir grâce à la majoration précédente : $|I_n(\alpha)| \leq \frac{\alpha e}{(\alpha - 1)^{n+2}}.$

(d) Déterminer un équivalent de $E(G_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

3. Détermination d'un encadrement de $E(G_n)$.

(a) Soit Φ_p la fonction définie par :

$$\Phi_p(u) = \sum_{i=0}^p \frac{(-1)^i}{i!} u^i, \quad u \in [0, 1].$$

Vérifier, pour $u \in [0, 1]$, la décroissance de la suite $\left(\frac{u^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

En déduire que, lorsque p est impair, $\Phi_p(u)$ est positif sur $[0, 1]$, puis que cela implique la même propriété pour $\Phi_p(u)$ lorsque p est pair.

(b) Montrer que la dérivée p -ième de f s'exprime selon la relation :

$$f^{(p)}(t) = \frac{p! e^{-t}}{(1-t)^{p+1}} \Phi_p(1-t).$$

En déduire le signe de $f^{(p)}(t)$ lorsque $t \in \left[0, \frac{1}{\alpha}\right]$.

(c) Établir :

$$S \cdot \alpha^n \left[f\left(\frac{1}{\alpha}\right) - \frac{\alpha e}{(\alpha - 1)^{n+2}} \right] \leq E(G_n) \leq S \cdot \alpha^n f\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

4. Étude numérique.

On suppose dans cette question $n = 7$, $\alpha = 3$; S reste un coefficient multiplicatif non précisé.

(a) Pour k prenant les valeurs $0, 1, \dots, 7$, donner les valeurs numériques de $P(X_7 = k)$.

(b) Calculer $E(G_7)$.

(c) Comparer ce résultat avec ce que prévoyait l'encadrement de $E(G_7)$ obtenu au 3.(c).