



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ECRICOME — 1988

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

EXERCICE DE MATHÉMATIQUES

1. On pose

$$I(n, p) = \int_{-1}^1 (x-1)^n (x+1)^p dx$$

où n et p désignent deux entiers naturels quelconques.

(a) Établir que pour $n \geq 1$ et p quelconque : $I(n, p) = -\frac{n}{p+1} I(n-1, p+1)$.

(b) Calculer, en fonction de n et p , $I(n, p)$ et préciser la valeur de $I(p, p)$.

2. Soit L_n la fonction définie sur $[-1, 1]$ par $L_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$, où $\frac{d^n}{dx^n}[f]$ désigne la dérivée n -ième d'une fonction f et n est un entier naturel quelconque.

(a) Calculer $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$.

(b) Démontrer que, pour tout n , L_n est une fonction polynomiale de degré n dont on précisera le coefficient de x^n .

(c) Montrer que pour n non nul et pour i prenant les valeurs $0, 1, 2, \dots, n-1$, $\frac{d^i}{dx^i} [(x^2 - 1)^n]$ est un polynôme admettant -1 et 1 comme racines.

3. Calculer pour $n \in \mathbb{N}$: $K_n = \int_{-1}^1 L_n(x) L_n(x) dx$.

EXERCICE DE STATISTIQUES-PROBABILITÉS

LES QUESTIONS 2 ET 3 SONT INDÉPENDANTES DE LA PREMIÈRE

Des messages codés à l'aide de 0 et de 1 sont envoyés régulièrement d'un point A à un point B . La transmission de ces messages est affectée par des perturbations appelées bruit. Ce bruit suit une loi normale centrée réduite. Pour en atténuer les effets, le responsable de

l'opération décide d'amplifier l'écart entre les deux valeurs en transmettant -1 au lieu de 0 et 2 à la place de 1 .

Si E désigne la valeur émise en A (soit -1 ou 2), alors la valeur reçue en B est $R = E + Z$, somme des deux variables aléatoires E et Z , où Z désigne le bruit. On suppose que E et Z sont indépendantes.

- Si R est supérieur à un seuil s positif ou nul, alors le message doit être interprété comme un 1 .
- Si $R < 0$, on retient 0 .
- Si $0 \leq R \leq s$, le message ne peut être interprété correctement et l'opération correspondante est annulée.

Cette annulation coûte 200 unités. De même, si le message 0 est codé comme 1 , il en coûte 500 unités. Inversement, si le message 1 est codé comme zéro, le coût associé est de 1000 unités.

80% des messages transmis sont des 1 donc 80% des valeurs émises sont des 2 .

1. Quelle est la valeur du seuil s qui minimise l'espérance du coût ?
2. Le seuil étant dorénavant pris égal à zéro, on envoie de A vers B le message 1101001 .
On suppose que les bruits affectant les transmissions des différents chiffres du message sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, de loi normale centrée réduite.

Quelle est la probabilité que le message ci-dessus soit correctement interprété en B ?

3. Le message du 2. décodé en B est rémis par B vers un autre lieu C dans les mêmes conditions que précédemment ($s = 0$). On suppose que les bruits affectant les quatorze transmissions de chiffres (de A vers B puis de B vers C) sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, de loi normale centrée réduite.

Quelle est la probabilité que le message soit le même en A et en C ?

PROBLÈME

Les parties A et B sont largement indépendantes.

Première partie - A

1. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, i, j) , on considère le cercle de centre O , de rayon 1. On désigne par M_1, M_2, M_3, M_4 les points de ce cercle définis respectivement par les couples de coordonnées $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$.

Un point lumineux se déplace aléatoirement sur ce cercle.

À l'instant $t = 0$, il se trouve en M_1 .

S'il se trouve à l'instant $t = n$ en M_i , il se positionne à l'instant $t = n + 1$ en l'un des deux points les plus proches de M_i avec la probabilité $\frac{1}{2}$ pour chacun d'eux ; il ne pourra donc pas se positionner au point diamétralement opposé à M_i .

On note $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ et δ_n les probabilités pour qu'à l'instant $t = n$ le point se trouve respectivement en M_1, M_2, M_3, M_4 et V_n la matrice unicolonne

$$V_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \\ \delta_n \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer une matrice A telle que $V_{n+1} = AV_n$.

(b) En déduire V_n en fonction de A et n .

2. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer A^3 .

(b) Expliciter A^n , $n \in \mathbb{N}$, et préciser les valeurs de α_n , β_n , γ_n et δ_n (question 1).

3. Soit E un espace vectoriel de dimension 4 rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ et f l'endomorphisme dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ est A .

(a) Déterminer le noyau $\text{Ker } f$ et l'image $\text{Im } f$ de l'endomorphisme f .

(b) Montrer que $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.

(c) Établir l'existence d'une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ de E telle que, relativement à cette base $\mathcal{B}'$, l'endomorphisme f ait comme matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme f et donner, pour chaque valeur propre, le sous-espace propre associé.

- (e) Préciser une matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}''$ uniquement constituée de vecteurs propres.
- (f) Retrouver à l'aide de ce qui précède l'expression de A^n pour tout entier n appartenant à $\mathbb{N}$.

Deuxième partie - B

Dans cette partie B, on considère un plan rapporté à un repère orthonormé (O, i, j) et le cercle de centre O , de rayon 1. Pour tout réel φ , on note $P(\varphi)$ le point de ce cercle de coordonnées $(\cos \varphi, \sin \varphi)$; on dit que φ repère le point $P(\varphi)$. Deux réels φ et φ' repèrent le même point si et seulement si $\varphi' - \varphi$ est un multiple entier de 2π .

En désignant par n un entier naturel non nul, on note $\theta = \frac{2\pi}{n}$; on remarque que $n\theta = 2\pi$.

Dans toute cette partie, $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices de type $(m, 1)$ à coefficients réels.

1. On considère de nouveau le problème étudié en A-1, mais en supposant désormais que le point se déplace selon les règles suivantes :

- À l'instant $t = 0$, le point lumineux est en M_1 .
- Si à l'instant $t = n$ le point lumineux est au point $P(\varphi)$, il se placera à l'instant $t = n + 1$ au point $P\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ avec la probabilité p ou au point $P\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$ avec la probabilité $q = 1 - p$.

On note encore α_n , β_n , γ_n et δ_n les probabilités pour qu'à l'instant $t = n$ le point

lumineux se trouve respectivement en M_1, M_2, M_3, M_4 ainsi que

$$V_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \\ \delta_n \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer une matrice A telle que $V_{n+1} = AV_n$.

(b) On pose

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad C_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que C_1 et C_3 sont des vecteurs colonnes propres de A et préciser les valeurs propres associées. Exprimer AC_2 et AC_4 en fonction de C_2 et C_4 .

(c) Montrer que les quatre vecteurs C_1, C_2, C_3, C_4 sont linéairement indépendants dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ des matrices de type $(4, 1)$ à coefficients réels.

(d) Soit V un vecteur colonne s'écrivant

$$V = \sum_{k=1}^4 \mu_k C_k$$

où $\mu_k \in \mathbb{R}$ pour $k = 1, 2, 3, 4$.

Calculer AV puis $A^n V$ en fonction de C_1, C_2, C_3, C_4 . On pourra poser $r = p - q$.

(e) Dédurre de ce qui précède $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ et δ_n en fonction de n et de la probabilité p .

2. Soit $z_1, z_2, \dots, z_n$ n réels distincts deux à deux.

Soit M la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \cdots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \cdots & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \cdots & z_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

(z_k^l se lit z_k élevé à la puissance l).

(a) Montrer que le rang de M est celui de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & z_1^3 & \cdots & z_1^{n-1} \\ 0 & 1 & z_2 & z_2^2 & \cdots & z_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & z_n & z_n^2 & \cdots & z_n^{n-2} \end{pmatrix}.$$

(b) En déduire le rang de M .

3. Soit A une matrice carrée d'ordre n de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ddots & & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

où $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ désignent n nombres réels. Autrement dit, en numérotant les lignes et les colonnes de 0 à $n-1$, le coefficient de A situé en ligne i et en colonne j est a_m , où $m \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ est le reste de la division euclidienne de $j-i+n$ par n .

Pour tout entier $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, on note

$$U_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(k\theta) \\ \cos(2k\theta) \\ \vdots \\ \cos((n-1)k\theta) \end{pmatrix} \quad W_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(k\theta) \\ \sin(2k\theta) \\ \vdots \\ \sin((n-1)k\theta) \end{pmatrix}$$

(les coordonnées étant numérotées de 0 à $n-1$, la coordonnée d'indice j de U_k est $\cos(jk\theta)$ et celle de W_k est $\sin(jk\theta)$), et on pose

$$c_k = \sum_{m=0}^{n-1} a_m \cos(mk\theta) \quad s_k = \sum_{m=0}^{n-1} a_m \sin(mk\theta).$$

(a) Montrer que pour tout entier $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$: $AU_k = c_k U_k - s_k W_k$ et $AW_k = s_k U_k + c_k W_k$.

En déduire que U_0 est un vecteur propre de A et, lorsque n est pair, que $U_{n/2}$ est un vecteur propre de A ; préciser les valeurs propres associées. Montrer enfin que si $s_k = 0$, alors U_k est un vecteur propre de A associé à la valeur propre c_k , et qu'il en est de même de W_k si $W_k \neq 0$.

(b) On fixe $n = 4$. Vérifier que U_0, U_1, U_2, W_1 sont respectivement les vecteurs C_1, C_2, C_3, C_4 de B-1, et en déduire que (U_0, U_2, U_1, W_1) est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $a_1 = a_3$ et, dans ce cas, préciser une matrice P telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale; écrire la matrice D .

(c) On revient au cas où n est quelconque et on suppose désormais que $a_m = a_{n-m}$ pour tout $m \in \{1, \dots, n-1\}$.

i. Montrer que $s_k = 0$ pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

ii. Établir, à l'aide des formules d'addition, que pour tout réel x et tout entier j :

$$2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos(jx) = \sin\left(\left(j + \frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\left(j - \frac{1}{2}\right)x\right)$$

$$2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sin(jx) = \cos\left(\left(j - \frac{1}{2}\right)x\right) - \cos\left(\left(j + \frac{1}{2}\right)x\right)$$

En déduire que pour tout entier relatif t qui n'est pas un multiple de n ,

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos(jt\theta) = 0,$$

et que pour tout entier relatif t ,

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sin(jt\theta) = 0.$$

- iii. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique $\langle X, Y \rangle = {}^tXY$. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ formée des vecteurs U_k pour $0 \leq k \leq \frac{n}{2}$ et des vecteurs W_k pour $1 \leq k < \frac{n}{2}$ est orthogonale, puis que c'est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- iv. Établir que A est diagonalisable et préciser une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
4. On reprend le problème du déplacement aléatoire d'un point sur le cercle de centre O , de rayon 1. On généralise la situation étudiée précédemment en envisageant N points sur ce cercle ($N \geq 3$), notés $M_0, \dots, M_{N-1}$, où $M_k = P\left(\frac{2k\pi}{N}\right)$ pour $k \in \{0, \dots, N-1\}$.

- À l'instant $t = 0$, le point lumineux se trouve en M_0 .
- Si à l'instant $t = n$ le point lumineux se trouve au point $P(\varphi)$, il peut se placer à l'instant $t = n + 1$ au point $P\left(\varphi + \frac{2\pi}{N}\right)$ avec la probabilité p ou au point $P\left(\varphi - \frac{2\pi}{N}\right)$ avec la probabilité $q = 1 - p$.

On note $p_0(n), \dots, p_{N-1}(n)$ les probabilités pour que le point lumineux soit à l'instant n respectivement en $M_0, \dots, M_{N-1}$ et

$$V_n = \begin{pmatrix} p_0(n) \\ \vdots \\ p_{N-1}(n) \end{pmatrix}.$$

(a) Quelle matrice A permet d'écrire $V_{n+1} = AV_n$?

(b) Généraliser les résultats obtenus en B-1. On procédera comme suit, en notant désormais $\theta = \frac{2\pi}{N}$, $r = p - q$, et U_k, W_k ($0 \leq k \leq N-1$) les vecteurs de B-3 construits avec N à la place de n .

- i. Exprimer AU_k et AW_k en fonction de U_k et W_k . Montrer que U_0 et, lorsque N est pair, $U_{N/2}$ sont des vecteurs propres de A et préciser les valeurs propres associées.

ii. Montrer que

$$V_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} U_k.$$

iii. Pour $k \in \{0, \dots, N-1\}$, on définit les suites $(x_{k,n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_{k,n})_{n \in \mathbb{N}}$ par $x_{k,0} = 1$, $y_{k,0} = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{k,n+1} = \cos(k\theta) x_{k,n} - r \sin(k\theta) y_{k,n} \quad y_{k,n+1} = r \sin(k\theta) x_{k,n} + \cos(k\theta) y_{k,n}$$

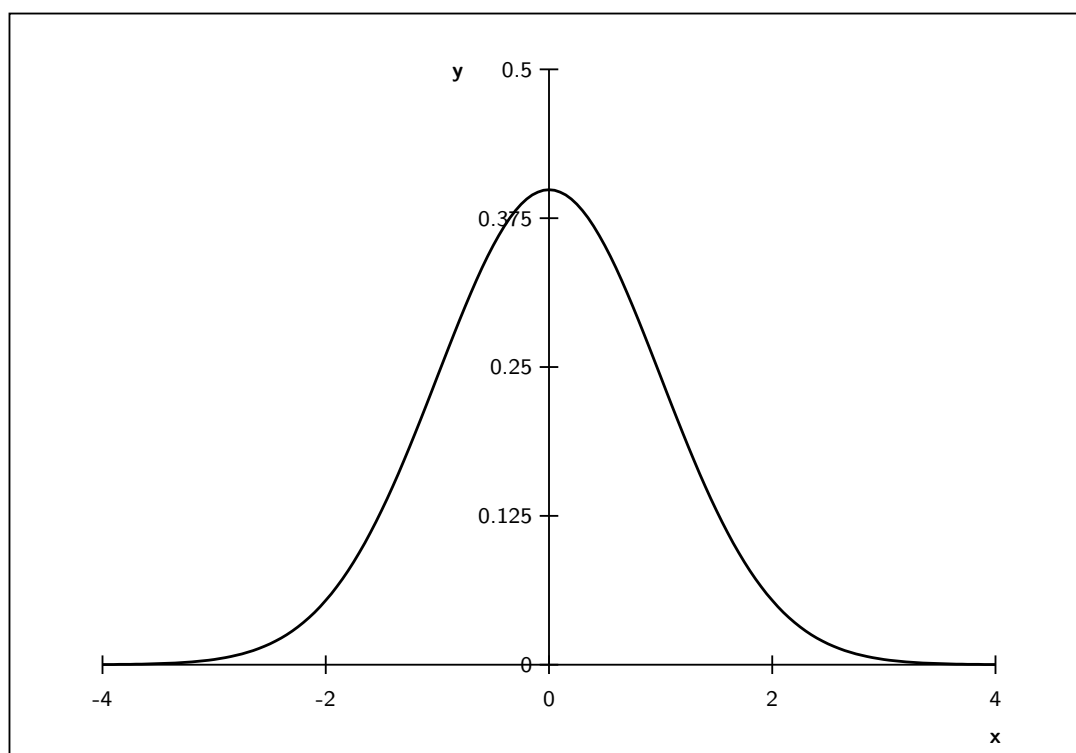
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n U_k = x_{k,n} U_k + y_{k,n} W_k$. En déduire, pour tout $j \in \{0, \dots, N-1\}$, une expression de $p_j(n)$ à l'aide des $x_{k,n}$ et $y_{k,n}$. Expliciter $p_j(n)$ dans le cas $p = q = \frac{1}{2}$.

iv. Vérifier que pour $N = 4$ on retrouve les résultats de B-1 (e).

ANNEXE

FONCTION DE RÉPARTITION DE LA LOI NORMALE RÉDUITE

(Probabilité de trouver une valeur inférieure à u)



La figure représente la densité $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ de la loi normale centrée réduite sur $[-4, 4]$; son maximum vaut $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.399$, atteint en 0.

Note : la table donne les valeurs de $F(u)$ pour u positif. Lorsque u est négatif, il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

Exemple : pour $u = 1.37$, $F(u) = 0.9147$; pour $u = -1.37$, $F(u) = 0.0853$.

u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636

u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0,7	0,758	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,975
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803
2,1	0,9821	0,9826	0,983	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909

u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985

Tableau — suite 2/2

u	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8980	0,8997	0,9015

u	0,07	0,08	0,09
1,3	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,985	0,9854	0,9857
2,2	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs de u

u	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
$F(u)$	0.998 65	0.999 03	0.999 31	0.999 52	0.999 66	0.999 77	0.999 841

Tableau — suite 2/2

u	3,8	4,0	4,5
$F(u)$	0.999 928	0.999 968	0.999 997